详细解答

STEP II 2008，第 6 题

纯数学 · 和化积公式

STEP II 2008，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s2-q6

关键思路

一个余弦与一个正弦相加，而两者的辐角又不相同，处理起来并不方便；但两个余弦之和可以用和化积公式（sum-to-product formula）分解成乘积。先把正弦改写成余弦；这样 f 的零点（zeros）就是两个简单因子的零点，而两个因子同时为零的那一点，正是曲线与轴相切之处。至于最后一部分，要记得余弦和正弦各自最大只能是 1。

解答

以下一律记

$$A = 2x + \frac{\pi}{3}, \qquad \sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos B, \quad \text{其中} B = \frac{3\pi}{4} - \frac{3x}{2},$$

于是 $f(x) = \cos A + \cos B$。

第 (i) 部分

$\cos(2x + \frac{\pi}{3})$ 这一项的周期（period）是 π，而 $\sin(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4})$ 的周期是 $\frac{2\pi}{3/2} = \frac{4\pi}{3}$。公共周期必须是两者各自的整数倍：$p\pi = q \cdot \frac{4\pi}{3}$ 即 $3p = 4q$，其最小的正数解是 $p = 4, q = 3$。所以对所有 x 都有 $f(x + 4\pi) = f(x)$，而 f 的周期是

$$4\pi.$$

更小的数都不行：我们会在第 (iii) 部分看到，$f(x) = 2$ 当且仅当 $x = \frac{11\pi}{6} + 4t\pi$（$t$ 为整数），所以 f 取得最大值的各点彼此相隔 4π，任何周期都必定是 4π 的倍数。

第 (ii) 部分

利用 $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$，其中

$$\frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2} + \frac{13\pi}{12}\right) = \frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24},$$
$$\frac{A-B}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{7x}{2} - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24},$$

我们得到

$$f(x) = 2\cos\left(\frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24}\right)\cos\left(\frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24}\right).$$

所以 $f(x) = 0$ 当且仅当两个余弦之中有一个为零。

第一个因子。由 $\frac{x}{4} + \frac{13\pi}{24} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 得 $x = -\frac{\pi}{6} + 4k\pi$。落在 $[-\pi, \pi]$ 内的只有 $x = -\frac{\pi}{6}$。

第二个因子。由 $\frac{7x}{4} - \frac{5\pi}{24} = \frac{\pi}{2} + k\pi$ 得 $\frac{7x}{4} = \frac{17\pi}{24} + k\pi$，所以

$$x = \frac{(17 + 24k)\pi}{42}.$$

我们需要 $-42 \le 17 + 24k \le 42$，所以 $k = -2, -1, 0, 1$，得出 $x = -\frac{31\pi}{42}, -\frac{7\pi}{42} = -\frac{\pi}{6}, \frac{17\pi}{42}, \frac{41\pi}{42}$。

综合起来，f 在 $-\pi \le x \le \pi$ 内的零点是

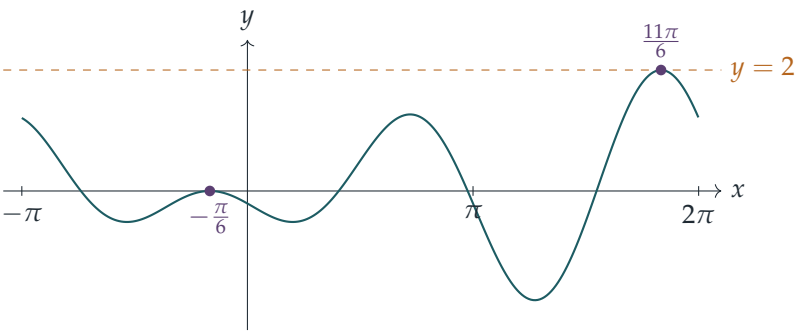
$$x = -\frac{31\pi}{42}, \quad -\frac{\pi}{6}, \quad \frac{17\pi}{42}, \quad \frac{41\pi}{42}.$$

想一想 为甚么在两张清单中都出现的值会与别不同?

在 $x = -\frac{\pi}{6}$ 处，两个余弦因子都是零。每个因子都是一个穿过零点的余弦，所以各自在该处变号（其导数（derivative）不为零，因为在 cos 为 0 之处 sin 是 ± 1）。因此在 $x = -\frac{\pi}{6}$ 附近，f 的表现就像一个常数乘以 $(x + \frac{\pi}{6})^2$：两次变号相乘，结果是没有变号。事实上，当 x 递增经过 $-\frac{\pi}{6}$ 时，第一个因子由正变负（其辐角向上穿过 $\frac{\pi}{2}$），第二个因子由负变正（其辐角向上穿过 $-\frac{\pi}{2}$），所以 f 在两侧都是负数。因此曲线与 x-轴相切而不穿过它之处是

$$x = -\frac{\pi}{6}.$$

在其余三个零点，只有一个因子为零，所以 f 变号，曲线穿过轴。



第 (iii) 部分

由于 $\cos A \le 1$ 及 $\cos B \le 1$，我们有 $f(x) \le 2$，等号成立当且仅当 $\cos A = 1$ 并且 $\cos B = 1$。以原来的函数表示：

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \iff 2x + \frac{\pi}{3} = 2m\pi \iff x = -\frac{\pi}{6} + m\pi,$$
$$\sin\left(\frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \iff \frac{3x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \iff x = \frac{\pi}{2} + \frac{4n\pi}{3},$$

其中 m, n 为整数。两者同时成立的条件是 $-\frac{\pi}{6} + m\pi = \frac{\pi}{2} + \frac{4n\pi}{3}$；两边乘以 $\frac{6}{\pi}$，即 $6m - 1 = 3 + 8n$，也就是

$$3m - 4n = 2.$$

其中一个解是 $m = 2, n = 1$，而通解是 $m = 2 + 4t, n = 1 + 3t$（因为 3 与 4 互质 (coprime)）。所以 $f(x) = 2$ 当且仅当

$$x = -\frac{\pi}{6} + (2 + 4t)\pi = \frac{11\pi}{6} + 4t\pi, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

在 $0 \le x \le 2\pi$ 内，这样的值只有

$$x = \frac{11\pi}{6}.$$

验算：$2 \cdot \frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = 4\pi$，而 $\frac{3}{2} \cdot \frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$，所以 $f = \cos 4\pi + \sin\frac{5\pi}{2} = 1 + 1 = 2$。

验算

- 在 10^4 个随机点上，因式分解后的形式与原来的 f 一致（误差在 10^{-12} 之内）。
- 以数值方法扫描 $[-\pi, \pi]$，只在 $-\frac{31\pi}{42}$、$\frac{17\pi}{42}$ 和 $\frac{41\pi}{42}$ 附近发现变号；在 $-\frac{\pi}{6}$ 处，我们发现两侧都有 $f(-\frac{\pi}{6} \pm 10^{-3}) \approx -8.7 \times 10^{-7}$，证实这是一个相切而不变号的零点。
- f 在 $[0, 2\pi]$ 上的最大值是 2，在 $x \approx 1.8333\pi = \frac{11\pi}{6}$ 处取得。

常见错误

- 把 $-\frac{\pi}{6}$ 列出两次，或者没有留意到它同时来自两个因子，而这恰恰就是找出相切点的线索。
- 分别解出 $\cos A = 1$ 和 $\cos B = 1$ 之后就停下来：两个条件必须在同一个 x 上成立，这就需要整数方程 $3m - 4n = 2$。

STEP 之外

第 (iii) 部分其实是在问两个周期运动何时会同步：条件 $3m - 4n = 2$ 是一条线性丢番图方程（linear Diophantine equation），它有解是因为 $\gcd(3,4)$ 整除 2。同一个想法若同时应用于多个频率，就会引向傅里叶级数（Fourier series），以及这个问题：周期函数之和在甚么情况下本身也是周期函数（只有当各周期之比为有理数时才是）。想了解背后的数论，可以读 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本数论入门经典）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。