详细解答

# STEP II 2008，第 5 题

纯数学 · 代换积分法

**STEP II 2008，第 5 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s2-q5

## 关键思路

两个积分（integral）都可以靠看出导数（derivative）来解决。第一个积分中，分子 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ 恰好是分母 $1+\sin^2 x$ 的导数，所以一眼就能看出积分结果是一个对数（logarithm）。第二个积分中，分子只有一个 $\sin x$，这提示我们设 $c = \cos x$，并先把分母写成 $1+\sin^2 x = 2-\cos^2 x$，余下的就是一个标准的部分分式（partial fractions）积分。于是，比较两个答案就变成比较两个含有 $\sqrt{2}$ 的数，而最后一部分的不等式（inequality）正是为了解决这个问题而设计的。

## 解答

### 两个积分

把两个积分分别记作 $I_1$（分子为 $\sin 2x$）和 $I_2$（分子为 $\sin x$）。

先看 $I_1$。由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1+\sin^2 x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x$，被积函数（integrand）具有 $f'(x)/f(x)$ 的形式，其中 $f(x) = 1+\sin^2 x > 0$。因此

$$I_1 = \Big[\ln(1+\sin^2 x)\Big]_0^{\pi/2} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

再看 $I_2$。写成 $1+\sin^2 x = 2-\cos^2 x$，并作代换（substitution）$c = \cos x$，于是 $\mathrm{d}c = -\sin x\,\mathrm{d}x$；当 $x$ 由 0 增至 $\frac{1}{2}\pi$ 时，$c$ 由 1 减至 0。负号把积分上下限（limits）对调：

$$I_2 = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}c}{2-c^2}.$$

利用部分分式，

$$\frac{1}{2-c^2} = \frac{1}{(\sqrt{2}-c)(\sqrt{2}+c)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}-c} + \frac{1}{\sqrt{2}+c}\right),$$

而当 $0 \le c \le 1$ 时，两个分母都保持为正，所以

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big[\ln(\sqrt{2}+c) - \ln(\sqrt{2}-c)\Big]_0^1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}.$$

这个结果可以化简得很漂亮：$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1) = 1$，所以 $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2$，因此

$$I_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2\ln(1+\sqrt{2}) = \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}.$$

### 不等式

根据二项式定理（binomial theorem），并利用 $(\sqrt{2})^2 = 2$、$(\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}$、$(\sqrt{2})^4 = 4$ 和 $(\sqrt{2})^5 = 4\sqrt{2}$，

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^5 &= 1 + 5\sqrt{2} + 10\cdot 2 + 10\cdot 2\sqrt{2} + 5\cdot 4 + 4\sqrt{2} \\ &= 41 + 29\sqrt{2}.\end{aligned}$$

现在 $\sqrt{2} < 2$（因为 $2 < 4$），所以 $29\sqrt{2} < 58$，从而 $(1+\sqrt{2})^5 < 41 + 58 = 99$，这正是所要证明的。

其次，$1.4^2 = 1.96 < 2$，而 1.4 和 $\sqrt{2}$ 都是正数，平方不改变大小次序，所以 $\sqrt{2} > 1.4$。

**想一想** $(1+\sqrt{2})^5 < 99$ 和 $\sqrt{2} > 1.4$ 怎么可能告诉我们任何关于 $2^{\sqrt{2}}$ 的事情?

写成 $1.4 = \frac{7}{5}$。那么 $2^{7/5}$ 就是 $2^7 = 128$ 的五次方根，而 $1+\sqrt{2}$ 的五次方正是我们刚刚估计过上界的量。准确地说：由于 $t \mapsto 2^t$ 是递增（increasing）函数，而且 $\sqrt{2} > \frac{7}{5}$，

$$2^{\sqrt{2}} > 2^{7/5}.$$

另外 $(1+\sqrt{2})^5 < 99 < 128 = (2^{7/5})^5$，而 $y \mapsto y^5$ 在 $y > 0$ 时递增，取正五次方根便得 $1+\sqrt{2} < 2^{7/5}$。两者结合，

$$2^{\sqrt{2}} > 2^{7/5} > 1 + \sqrt{2}.$$

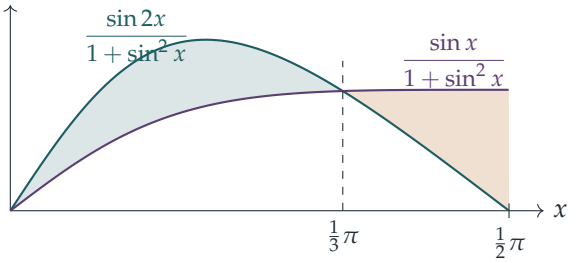
### 哪个积分较大?

函数 ln 是递增的，所以由最后一个不等式可得 $\ln(2^{\sqrt{2}}) > \ln(1+\sqrt{2})$，即 $\sqrt{2}\ln 2 > \ln(1+\sqrt{2})$。两边除以 $\sqrt{2} > 0$，

$$I_1 = \ln 2 > \frac{\ln(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = I_2.$$

所以分子为 $\sin 2x$ 的那个积分较大。

这个大小关系并不能直接从被积函数看出来。由于 $\sin 2x - \sin x = \sin x\,(2\cos x - 1)$，第一个被积函数在 $0 < x < \frac{1}{3}\pi$ 时较大，而在 $\frac{1}{3}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ 时较小：




问题在于青绿色区域的面积是否大于琥珀色区域的面积。答案是肯定的，但只多出约 0.07。这就是为甚么要对 $\sqrt{2}$ 作一番仔细的运算。

## 验算

- 对原来的被积函数使用辛普森法则（Simpson's rule），得 $I_1 \approx 0.693147$ 和 $I_2 \approx 0.623225$，与 $\ln 2$ 和 $\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{2}$ 吻合至小数点后十位。
- $(1+\sqrt{2})^5 \approx 82.01$，而 $41 + 29\sqrt{2} \approx 82.01$；远低于 99。
- $2^{\sqrt{2}} \approx 2.665$、$2^{1.4} \approx 2.639$ 和 $1+\sqrt{2} \approx 2.414$，次序与所断言的一致。
- 对 $I_2$ 作合理性检查：被积函数介乎 $\frac{1}{2}\sin x$ 与 $\sin x$ 之间，所以 $\frac{1}{2} < I_2 < 1$，而 0.62 确实在此范围内。

## 常见错误

- 忘记 $\mathrm{d}c = -\sin x\,\mathrm{d}x$ 会把积分上下限对调，结果为一个正的被积函数算出负值。
- 把 $I_2$ 停留在 $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ 的形式：若没有看出对数内的分式就是 $(\sqrt{2}+1)^2$，它与最后一部分中 $1+\sqrt{2}$ 的联系便隐而不见。
- 单凭计算机就断言 $2^{\sqrt{2}} > 1+\sqrt{2}$。题目要求的是经由 $2^{7/5}$ 的那一串不等式，并须说明 $2^t$ 和 $y^5$ 的单调性（monotonicity）。

## STEP 之外

$2^{\sqrt{2}}$ 究竟是甚么意思？在大学里，它被定义为 $e^{\sqrt{2}\ln 2}$，而我们用过的那个事实，即 $2^t$ 不论 $t$ 是有理数还是无理数都随 $t$ 递增，是由指数函数（exponential function）的性质推出的，这些性质会在大学的第一门分析课中严格证明。（盖尔范德（Gelfond）与施奈德（Schneider）的一条著名定理表明，$2^{\sqrt{2}}$ 其实是超越数（transcendental number）。）至于 $e^x$ 和 $\ln x$ 的严格构造，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。