详细解答

STEP II 2008，第 4 题

纯数学 · 隐函数微分法

STEP II 2008，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s2-q4

关键思路

处理两条直线之间的夹角，用向量（vector）最为方便：$F(x,y)=1$ 的法线（normal）沿 ∇F 的方向，而对于平面上两个向量 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{n}$，两者夹角的 tan 等于 |叉积| 除以点积（dot product）。在这一题，点积原来恰好是曲线方程的左方，即 1。之后，θ 取驻值（stationary value）当且仅当 y^2-x^2 取驻值，余下的就是关于 x^2+y^2 和 xy 的代数运算。

解答

斜率

把 $x^2+y^2+2axy=1$ 对 x 作隐函数微分（implicit differentiation），

$$2x+2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2a\left(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=0 \quad\Longrightarrow\quad (ax+y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-(x+ay).$$

因此，只要 $ax+y\neq 0$，斜率（gradient）就是 $-\dfrac{x+ay}{ax+y}$，正如题目所求。

角 θ

切线（tangent）的方向为 $(ax+y,\ -(x+ay))$，所以法线的方向为

$$\mathbf{n}=(x+ay,\ ax+y),$$

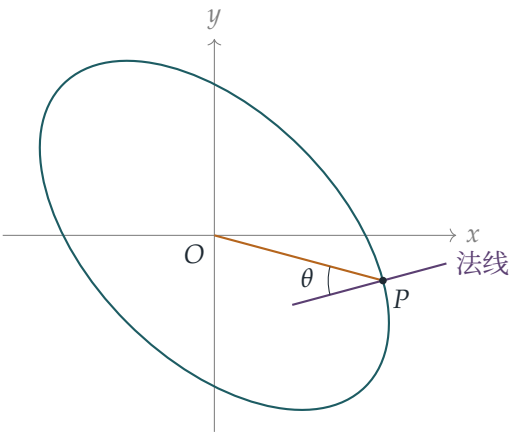
即与它垂直的向量。（这就是 $F = x^2 + y^2 + 2axy$ 的 $\frac{1}{2}\nabla F$，即使在 $ax + y = 0$ 的地方也有意义。）向量 $\overrightarrow{OP}$ 是 $\mathbf{p} = (x, y)$。设 ϕ 为 $\mathbf{p}$ 与 $\mathbf{n}$ 之间的夹角，则

$$|\mathbf{p}||\mathbf{n}|\cos\phi = \mathbf{p}\cdot\mathbf{n} = x(x+ay) + y(ax+y) = x^2 + y^2 + 2axy = 1,$$
$$|\mathbf{p}||\mathbf{n}|\sin\phi = |x(ax+y) - y(x+ay)| = |ax^2 - ay^2| = a|y^2 - x^2|,$$

其中第二行是二维叉积（cross product）的大小（即由 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{n}$ 所张成的平行四边形的面积），而 $a > 0$。

由于点积为 $+1 > 0$，ϕ 本身已是锐角（或零），所以 $\phi = \theta$。把两行相除，得

$$\tan\theta = a\,|y^2 - x^2|.$$



上面的草图（取 $a = \frac{1}{2}$）显示了这条曲线：由于 $0 < a < 1$，它是一个椭圆（ellipse），两轴分别沿 $y = \pm x$。图中所画的点 P 是 θ 最大的其中一点。

第 (i) 部分

函数 $t \mapsto \arctan(t)$ 严格递增(strictly increasing),所以凡在 $f \neq 0$ 之处,θ 都是 $f = y^2 - x^2$ 的光滑递增函数。

想一想 在 $y^2 = x^2$ 的点，绝对值（modulus）出现尖角，那又如何?

在这些点 $\theta = 0$。假如 θ 在这样的一点导数（derivative）为零，那么 $a|f|$ 除以 x 的改变量会趋向 0，这迫使 $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x = 0$ 同样成立。所以在任何情况下都有

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 0 \implies \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2 - x^2) = 0 \implies y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x.$$

这里我们用到斜率公式，所以需要 $ax + y \neq 0$（下文会确认这个条件必然成立）。代入后再乘以 $ax + y$:

$$-y(x+ay) = x(ax+y) \implies -xy - ay^2 = ax^2 + xy \implies a(x^2 + y^2) + 2xy = 0.$$

这就是 (i)。

顺带一提，假如 $ax+y=0$，则由 (i) 会得出 $ax^2(1+a^2)-2ax^2=-a(1-a^2)x^2=0$，于是 $x=y=0$，但这一点不在曲线上。所以这类点永远不会造成麻烦。

第 (ii) 部分

记 $S=x^2+y^2$。由 (i)，$2xy=-aS$。把它代入曲线方程，

$$S+a(-aS)=1 \quad\Longrightarrow\quad S=\frac{1}{1-a^2}.$$

因此

$$x^2+y^2+2xy=S-aS=\frac{1-a}{1-a^2}=\frac{1}{1+a},$$

即 $(1+a)(x^2+y^2+2xy)=1$，正如题目所求。

第 (iii) 部分

我们需要求 $|y^2-x^2|$。利用 $(y^2-x^2)^2=(x^2+y^2)^2-4x^2y^2=S^2-(2xy)^2$，

$$(y^2-x^2)^2=S^2-a^2S^2=(1-a^2)\cdot\frac{1}{(1-a^2)^2}=\frac{1}{1-a^2}.$$

取正平方根（因 $0<a<1$，此举成立），得 $|y^2-x^2|=1/\sqrt{1-a^2}$，所以

$$\tan\theta=\frac{a}{\sqrt{1-a^2}}.$$

验算

- 旋转坐标轴：设 $u=(x+y)/\sqrt{2}$ 及 $v=(x-y)/\sqrt{2}$，曲线便化为 $(1+a)u^2+(1-a)v^2=1$，而 $y^2-x^2=-2uv$。由算术平均—几何平均不等式（AM–GM），$1\geq 2\sqrt{(1-a^2)}\,|uv|$，所以 $\tan\theta=2a|uv|\leq a/\sqrt{1-a^2}$，等号在 $(1+a)u^2=\frac{1}{2}$ 时成立。由于 $x^2+y^2+2xy=2u^2$，这个等号条件正正就是 (ii)。所以该驻值是 θ 的最大值。
- 取 $a=\frac{1}{2}$：$P\approx(1.1154,\,-0.2989)$ 满足曲线方程和 (i)，而 $\tan\theta=\frac{1}{2}|y^2-x^2|\approx 0.5774=1/\sqrt{3}$，所以 $\theta=30^\circ$。对若干个 a 值，沿椭圆一周以数值方法扫描 $\tan\theta$，所得的最大值正是这些数值。
- 当 $a\to 0$ 时，曲线变成单位圆，其法线通过 O，所以 $\theta\to 0$，与 $\tan\theta\to 0$ 吻合。

常见错误

- 以 OP 和法线的斜率套用 $\tan(\alpha-\beta)$：这方法行得通，但要小心处理 $x=0$ 的情况和正负号，而向量的做法可同时避开这两个问题。

- 忘记了为何所求得的角是*锐角*：关键在于点积为 $+1$。
- 以平方求 $|y^2 - x^2|$，其后却忘记取正根。

STEP 之外

把 $x^2 + y^2 + 2axy$ 写成二次型（quadratic form）$\mathbf{x}^{\mathsf{T}} A\mathbf{x}$，其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix}$，则椭圆的两轴就是 A 的特征向量（eigenvector）$(1,1)$ 和 $(1,-1)$，而特征值（eigenvalue）$1 \pm a$ 决定了半轴的长度。对称矩阵（symmetric matrix）的这种对角化（diagonalisation）是大学一年级线性代数的核心概念；参看 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。