详细解答

STEP II 2008，第 3 题

纯数学 · 不等式与反证法

STEP II 2008，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s2-q3

关键思路

从草图可见，当 $x \geq 0$ 时，这条三次曲线（cubic）永远不会跌到 x 轴之下；把“$y \geq 0$”重新整理，便得到不等式 $x^2(1-x) \leq 4/27$。至于反证法（proof by contradiction）的部分，留意 $bc(1-a)$、$ca(1-b)$、$ab(1-c)$ 这三个数逐个来看都不好处理，但它们的乘积可以重新组合成 $a^2(1-a)\cdot b^2(1-b)\cdot c^2(1-c)$，而这正好受第一个结果控制。第 (ii) 部分用的是同一个技巧，只是把三次式换成二次式（quadratic）。

解答

第 (i) 部分：曲线

对 $y = 27x^3 - 27x^2 + 4$ 求导，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 81x^2 - 54x = 27x(3x-2),$$

它在 $x = 0$ 和 $x = \frac{2}{3}$ 时为零。当 $x = 0$ 时，$y = 4$；当 $x = \frac{2}{3}$ 时，

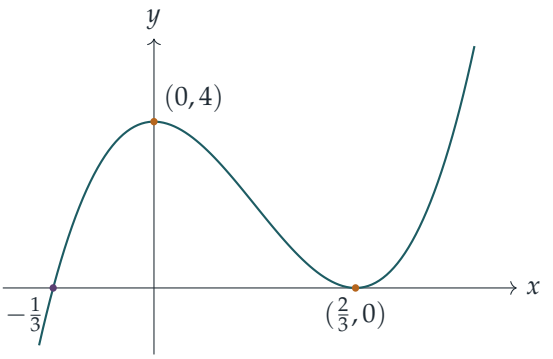
$$y = 27\cdot\tfrac{8}{27} - 27\cdot\tfrac{4}{9} + 4 = 8 - 12 + 4 = 0.$$

由于 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 162x - 54$ 在 $x = 0$ 时为 $-54 < 0$，在 $x = \frac{2}{3}$ 时为 $54 > 0$，所以转向点（turning point）是极大点（maximum）$(0, 4)$ 和极小点（minimum）$(\frac{2}{3}, 0)$。

极小点位于 x 轴上，所以曲线在该处与横轴相切，而 $(3x-2)^2$ 是一个因式（factor）。比较 x^3 的系数和常数项，得

$$27x^3 - 27x^2 + 4 = (3x-2)^2(3x+1),$$

所以曲线与横轴相交的另一处只有 $x = -\frac{1}{3}$。曲线从 $-\infty$ 上升，在 $x = -\frac{1}{3}$ 穿过横轴，在 $(0,4)$ 达到顶点，然后下降至 $(\frac{2}{3},0)$ 与横轴相切，之后再度上升。



第 (i) 部分：不等式

当 $x \geq 0$ 时，我们有 $3x+1>0$ 和 $(3x-2)^2 \geq 0$，所以由因式分解（factorisation）可得 $27x^3 - 27x^2 + 4 \geq 0$。（从草图看也是一样：在 $x \geq 0$ 的范围内，曲线的最低点就是极小点 $(\frac{2}{3},0)$。）重新整理，

$$4 \geq 27x^2 - 27x^3 = 27x^2(1-x), \qquad \text{所以} \qquad x^2(1-x) \leq \frac{4}{27} \quad \text{对所有} x \geq 0,$$

而等号只在 $x = \frac{2}{3}$ 时成立。这就是所要求的结果。

第 (i) 部分：反证

用反证法，假设三个数全都大于 4/27：

$$bc(1-a) > \tfrac{4}{27}, \qquad ca(1-b) > \tfrac{4}{27}, \qquad ab(1-c) > \tfrac{4}{27}.$$

这里六个量全是正数，所以我们可以把三条不等式相乘：

$$bc(1-a)\cdot ca(1-b)\cdot ab(1-c) > \left(\tfrac{4}{27}\right)^3.$$

? **想一想** 第一个结果怎样才能对这些混合的乘积有所说明?

把左边重新组合，让每个字母与它自己的括号归在一起：

$$bc(1-a)\cdot ca(1-b)\cdot ab(1-c) = [a^2(1-a)][b^2(1-b)][c^2(1-c)].$$

a, b, c 每个都是非负数，所以根据第一个结果，每个方括号的值都介乎 0（因为 $1-a \geq 0$，其余类推）与 4/27 之间。把这三条非负数之间的不等式相乘，

$$[a^2(1-a)][b^2(1-b)][c^2(1-c)] \leq \left(\tfrac{4}{27}\right)^3.$$

这与上面的严格不等式矛盾。所以我们的假设不成立，即 $bc(1-a)$、$ca(1-b)$、$ab(1-c)$ 之中至少有一个小于或等于 $4/27$。

第 (ii) 部分

同一个想法对二次式也行得通。对任意实数 t，

$$t(1-t) = \tfrac{1}{4} - (t-\tfrac{1}{2})^2 \leq \tfrac{1}{4},$$

这可由配方法(completing the square)得出。用反证法，假设 $p(1-q) > \frac{1}{4}$ 及 $q(1-p) > \frac{1}{4}$。两边都是正数，所以相乘可得

$$p(1-q)\cdot q(1-p) > \tfrac{1}{16}.$$

但左边可以重新组合成 $[p(1-p)][q(1-q)]$，而由于 $0 < p, q < 1$，每个方括号的值都介乎 0 与 $\frac{1}{4}$ 之间，所以乘积至多为 $\frac{1}{16}$。这是矛盾的，所以 $p(1-q)$ 和 $q(1-p)$ 之中至少有一个小于或等于 $\frac{1}{4}$。

验算

- 等号成立的情况：$a = b = c = \frac{2}{3}$ 使 (i) 中的三个数全都等于 $\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{4}{27}$，而 $p = q = \frac{1}{2}$ 使 (ii) 中的两个数都等于 $\frac{1}{4}$。所以 $4/27$ 和 $1/4$ 这两个界不能再改进。
- 展开 $(3x-2)^2(3x+1) = (9x^2-12x+4)(3x+1) = 27x^3 - 27x^2 + 4$，确认因式分解无误。
- 以数值计算，$x^2(1-x)$ 在 $[0,3]$ 上的最大值是 $0.148148\ldots = 4/27$。在 $(0,1)$ 内随机抽取一百万组三元组 (a,b,c)，三个乘积中最小的一个从未超过 0.1468；随机抽取一百万对数值，$p(1-q)$、$q(1-p)$ 中较小的一个从未超过 0.24998。

常见错误

- 把不等式相乘，却没有说明所有量都是正数。“$A > \alpha$、$B > \beta$ 蕴含 $AB > \alpha\beta$”这一步对负数并不成立，所以 $0 < a, b, c < 1$ 这个假设确实是必需的。
- 在 $x < 0$ 时使用 $x^2(1-x) \leq 4/27$ 这个界，但它在该范围并不成立（试试 $x = -1$）。
- 只证明某一个特定的数（例如 $bc(1-a)$）很小。它不一定小：当 a 接近 0 而 $b = c$ 接近 1 时，它接近 1。

STEP 之外

把若干个量相乘,使一个对称的界得以派上用场,这种做法与算术—几何平均不等式(AM–GM inequality）十分相近，而后者可以直接给出第一个结果：对 $0 \le x \le 1$，把算术—几何平均不等式应用于 $\frac{x}{2}, \frac{x}{2}, 1-x$（三者之和为 1），便得 $\frac{x^2}{4}(1-x) \le \left(\frac{1}{3}\right)^3$。这个论证也带有鸽巢原理（pigeonhole principle）的味道：如果乘积很小，就不可能每个因子都很大。这些关于估界和求最优值的想法，会在大学一年级的分析（analysis）课程中进一步发展；Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门读物）是个平易近人的起点，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）则有更多这类风格的 STEP 题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。