详细解答

STEP II 2008，第 2 题

纯数学 · 部分分式与级数

STEP II 2008，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s2-q2

关键思路

部分分式（partial fractions）把一个难以处理的有理函数（rational function）拆成三项，而这三项的展开式我们都烂熟于心：一个等比级数（geometric series）、它的导数，以及一个以 $-x^2$ 为公比的等比级数。头两项给出的系数大致随 n 增长；第三项的贡献永远只是 $\pm\frac{1}{2}$，并以周期 4 重复，题目中“非此即彼”的两种情况正是由此而来。至于最后一部分，要找一个 x 的值，使函数变成题目所给的分数。

解答

部分分式

由于 $(1-x)^2$ 是重复的一次因式，而 $1+x^2$ 是不可约二次式（irreducible quadratic），我们设

$$\frac{1+x}{(1-x)^2(1+x^2)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{Cx+D}{1+x^2},$$

于是对所有 x，

$$1+x = A(1-x)(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)(1-x)^2.$$

- 代入 $x=1$：$2=2B$，所以 $B=1$。
- 代入 $x=0$：$1=A+B+D$，所以 $A=-D$。
- 代入 $x=\mathrm{i}$（这是容许的，因为这是一个多项式恒等式）：$1+\mathrm{i}=(C\mathrm{i}+D)(1-\mathrm{i})^2=(C\mathrm{i}+D)(-2\mathrm{i})=2C-2D\mathrm{i}$。比较实部和虚部，得 $C=\frac{1}{2}$ 和 $D=-\frac{1}{2}$，因此 $A=\frac{1}{2}$。

作为验算，右边 x^3 的系数是 $-A+C=0$，与左边相符。所以

$$\frac{1+x}{(1-x)^2(1+x^2)}=\frac{1}{2(1-x)}+\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1-x}{2(1+x^2)}.$$

系数

当 $|x|<1$ 时，三个展开式全部收敛（converge），而且

$$\begin{aligned}\frac{1}{2(1-x)}&=\tfrac{1}{2}\sum_{n\geq 0}x^n, \qquad \frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n\geq 0}(n+1)x^n,\\ -\frac{1-x}{2(1+x^2)}&=-\tfrac{1}{2}(1-x)\left(1-x^2+x^4-x^6+\cdots\right)\\ &=-\tfrac{1}{2}\left(1-x-x^2+x^3+x^4-x^5-x^6+x^7+\cdots\right).\end{aligned}$$

最后一行括号内的系数是 $1,-1,-1,1$，以周期 4 重复：当 $n=2k$ 时，x^n 的系数是 $(-1)^k$；当 $n=2k+1$ 时，则是 $-(-1)^k$。所以，当 $n\equiv 0$ 或 $3\pmod 4$ 时，第三项对 x^n 的贡献是 $-\frac{1}{2}$；当 $n\equiv 1$ 或 $2\pmod 4$ 时，贡献是 $+\frac{1}{2}$。

> **想一想** 为甚么周期为 4 的规律只产生两种情况，而不是四种?

因为只有正负号才有影响：把三项的贡献相加，

$$a_n=\tfrac{1}{2}+(n+1)\mp\tfrac{1}{2}=\begin{cases}n+1, & n\equiv 0\text{或}3 \pmod 4,\\ n+2, & n\equiv 1\text{或}2 \pmod 4,\end{cases}$$

这就是所要求的结果。这个数列的首几项是 $1,3,4,4,5,7,8,8,9,11,12,12,\ldots$

小数近似值

> **想一想** x 取甚么值时，函数会等于 $\frac{11\,000}{8181}$?

从分母可以猜到 $x=\frac{1}{10}$：这时 $(1-x)^2=0.81$ 而 $1+x^2=1.01$，所以 $(1-x)^2(1+x^2)=0.8181$，并且

$$\frac{1+\frac{1}{10}}{0.8181}=\frac{1.1}{0.8181}=\frac{11\,000}{8181}.$$

由于 $\frac{1}{10}<1$，级数展开成立，而且

$$\frac{11\,000}{8181}=\sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{10^n}=1+0.3+0.04+0.004+0.0005+0.00007+\cdots.$$

只要 $a_n\leq 9$（即直至 $n=8$ 为止），各系数就正好是小数的各个数字：1.34457889。此后

的系数都是两位数，所以必须进位：

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{8}\frac{a_n}{10^n} &= 1.344\,578\,89\\ +11\times10^{-9} &\to 1.344\,578\,901\\ +12\times10^{-10} &\to 1.344\,578\,902\,2\\ +12\times10^{-11} &\to 1.344\,578\,902\,32\\ +13\times10^{-12} &\to 1.344\,578\,902\,333.\end{aligned}$$

其后各项只会影响第十一位有效数字（significant figure）及以后的数字，所以准确至九位有效数字，

$$\frac{11\,000}{8181}\approx 1.344\,578\,90.$$

验算

- 在函数中代入 $x=0$ 得 $1=a_0$，而 $n=0$ 属于 $n+1$ 的情况。把 $(1+x)(1+2x+\cdots)(1-x^2+\cdots)$ 乘开，得 $1+3x+\cdots$，所以 $a_1=3=1+2$。
- 用长除法（long division）得 $11\,000/8181=1.344\,578\,902\,33\ldots$，与级数的结果一致。我们亦以精确的幂级数（power series）除法核对了 $n<60$ 的 a_n，并在多个随机选取的有理点上核对了部分分式恒等式。

常见错误

- 忘记进位：直接把 a_n 当作各位数字读出，会得到 $1.34457889\ldots$，第九位有效数字就错了。
- 把 $\frac{Cx+D}{1+x^2}$ 写成 $\frac{D}{1+x^2}$；不可约二次式的分子必须是一次式。
- 把 $1.344578902\ldots$ 舍入为 1.34457890 之后，却略去末尾的零；这个零在这里是一位有效数字。

STEP 之外

有理函数必定有幂级数展开式，其系数是 n 的多项式，再加上形如 r^n 的项和周期性的规律，分母的每个根各对应一项；这就是*线性递推关系*（linear recurrences）和*生成函数*（generating functions）的理论。在这一题，根 1（二重根）和 $\pm\mathrm{i}$ 分别带来线性增长和周期为 4 的起伏。这也解释了为甚么每个分数的小数展开最终都会循环。Wilf 的

generatingfunctionology 是一本生动有趣、可免费取得的入门书，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则有更多同类风格的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。