详细解答

STEP II 2008，第 12 题

概率与统计 · 独立事件

STEP II 2008，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s2-q12

关键思路

一个计数的期望值（expectation），等于构成它的各个事件的概率之和，所以第一部分只是一条关于 p 的二次方程。至于第二部分，法官们在心中掷硬币时根本没有看被告一眼，所以国王的宣判与真相独立（independent）。把宣判正确的概率用 t 表示，再围绕 $\frac{1}{2}$ 重新整理，答案一行便出来。

解答

求 p

设 A、B、C 分别为驴子、河狸和半人马裁定有罪的事件，并设 I_A、I_B、I_C 为它们的指示变量（indicator variable）（事件发生时等于 1，否则等于 0）。那么 $X = I_A + I_B + I_C$，而由于 $\mathrm{E}(I_A) = \mathrm{P}(A)$，其余类推，由期望值的线性性质（linearity of expectation）可得

$$\mathrm{E}(X) = p + \frac{p}{3} + p^2.$$

（线性性质并不需要独立性；我们稍后才会用到独立性。）令上式等于 $\frac{4}{3}$，再乘以 3：

$$3p^2 + 4p - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (3p - 2)(p + 2) = 0.$$

概率不可能是负数，所以 $p + 2 \neq 0$，因此

$$p = \frac{2}{3}.$$

于是三位法官说“有罪”的概率分别为

$$\mathrm{P}(A) = \frac{2}{3}, \qquad \mathrm{P}(B) = \frac{2}{9}, \qquad \mathrm{P}(C) = \frac{4}{9},$$

全部都在 $[0, 1]$ 之内，正如所应有的。

国王说“有罪”的概率

设 K 为最少两位法官裁定有罪的事件，即 K 是国王宣判被告有罪的事件。把上面三个概率记作 a、b、c。恰好两个有罪裁决有三种情况，三个全是有罪则有一种情况；利用法官之间的独立性，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(K) &= ab(1-c) + ac(1-b) + bc(1-a) + abc \\ &= ab + ac + bc - 2abc.\end{aligned}$$

这里 $ab = \frac{4}{27}$，$ac = \frac{8}{27}$，$bc = \frac{8}{81}$，$abc = \frac{16}{243}$，所以

$$\mathrm{P}(K) = \frac{36}{243} + \frac{72}{243} + \frac{24}{243} - \frac{32}{243} = \frac{100}{243}.$$

为简便起见，把它记作 g。

求 t

设 D 为被告确实有罪的事件，所以 $\mathrm{P}(D) = t$。当 D 与 K 同时发生，或两者皆不发生时，国王的宣判便是正确的。

> ? **想一想** 为甚么我们可以把 $\mathrm{P}(D)$ 乘以 $\mathrm{P}(K)$?

法官们的决定是“完全随机”的：他们的裁决并不取决于证据，所以 K 与 D 独立。因此

$$\mathrm{P}(\text{正确}) = \mathrm{P}(D)\,\mathrm{P}(K) + \mathrm{P}(D')\,\mathrm{P}(K') = tg + (1-t)(1-g).$$

现在减去 $\frac{1}{2}$ 并因式分解（factorise）：

$$\begin{aligned}tg + (1-t)(1-g) - \tfrac{1}{2} &= 2tg - t - g + \tfrac{1}{2} \\ &= (2t-1)(g - \tfrac{1}{2}).\end{aligned}$$

所以国王宣判正确的概率为 $\frac{1}{2}$，当且仅当 $(2t-1)(g-\frac{1}{2}) = 0$。由于 $g = \frac{100}{243} \neq \frac{1}{2}$，第二个因式不等于零，故必有

$$t = \frac{1}{2}.$$

不用因式分解也可以得到同样的结果：由 $\frac{100}{243}t + \frac{143}{243}(1-t) = \frac{1}{2}$ 得 $143 - 43t = \frac{243}{2}$，所以 $43t = \frac{43}{2}$，即 $t = \frac{1}{2}$。

留意 p 的值在这里几乎无关重要：不论法官们的概率是多少，只要 $\mathrm{P}(K) \neq \frac{1}{2}$，一个无视证据的法庭有一半机会判对，当且仅当有罪与无辜的被告同样常见。

验算

▶ 取 $p = \frac{2}{3}$：$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$，符合要求。

- 用分数精确地列举全部八种裁决组合，得 $\mathrm{P}(K) = \frac{100}{243} \approx 0.412$ 及 $\mathrm{E}(X) = \frac{4}{3}$。
- 取 $t = \frac{1}{2}$ 进行 200 000 次模拟试验，国王宣判正确的个案所占比例为 0.5007。
- 检查公式是否合理：若 $t = 1$（人人有罪），国王判对的概率为 g；若 $t = 0$，则为 $1 - g$；这个概率是 t 的线性函数，所以它在中点处经过 $\frac{1}{2}$。

常见错误

- 把“最少两个”当作 $ab + ac + bc$。这样会把三个全中的情况数了三次；正确的表达式要减去 $2abc$（或者直接把四个互斥的情况相加）。
- 忘记舍去 $p = -2$，或者没有检查 p^2 和 $p/3$ 是否有效的概率。
- 把“国王宣判正确”只当作 $\mathrm{P}(K)$，忘记了那些获正确判定无罪的无辜被告。

STEP 之外

第一部分是一个强大技巧的小例子：把一个计数写成指示变量之和，于是它的期望值就只是概率之和，即使各事件并不独立亦然。大学本科的概率论经常使用这个技巧，例如用来求随机排列（random permutation）的不动点（fixed point）的期望数目。第二部分讲的是一个输出与真相独立的分类器（classifier），这正是思考检测中的灵敏度（sensitivity）、特异度（specificity）和贝叶斯定理（Bayes′ theorem）的起点。Blitzstein 与 Hwang 的 *Introduction to Probability*（概率论入门）大量运用指示变量，是很好的下一步读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。