详细解答

STEP II 2008，第 11 题

力学 · 移动楔上的质点

STEP II 2008，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

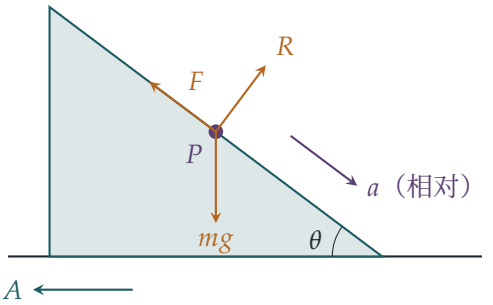
step.maths.org/questions/08-s2-q11

关键思路

系统以外没有任何东西沿水平方向施力（地面是光滑的），所以质点（particle）与楔块（wedge）的水平动量（momentum）一直保持为零；楔块的加速度几乎不费工夫就得到了。其余一切，都来自把质点的*真实*加速度写成“它相对于楔块的加速度，加上楔块的加速度”，然后沿斜面方向和垂直于斜面方向分解（resolve）质点所受的力。静止的观察者所见的路径，是一条沿真实加速度方向的直线，因为一切都由静止开始，而且各加速度都是常数。

解答

我们把 P 视为质点，把楔块视为刚体（rigid body）。地面光滑；斜面粗糙，摩擦系数（coefficient of friction）为 μ。把铅垂面放在左边，于是斜面向右下方倾斜。当 P 向右下方滑动时，楔块被推向左方。设楔块的加速度为向*左*的 A，并设 P *相对于楔块*沿斜面向下的加速度为 a。设 R 为法向反作用力（normal reaction），F 为作用于 P 的摩擦力（friction）；当 P 向下滑动时，摩擦力沿斜面向上。



取 x 轴向右、y 轴向上。沿斜面向下的单位向量（unit vector）是 $(\cos\theta, -\sin\theta)$，所以 P 的真实加速度是

$$(a\cos\theta - A,\ -a\sin\theta).$$

第 (i) 部分：楔块的加速度

作用于“P 加楔块”这个系统的外力，只有重力和光滑地面的法向反作用力，两者都是铅垂的。所以总水平动量是常数，而由于一切都由静止开始，这个常数是零。因此 $m\times$（加速度）的水平分量之和为零：

$$m(a\cos\theta - A) + km(-A) = 0 \quad\Longrightarrow\quad A = \frac{a\cos\theta}{k+1},$$

这正是所要求的结果。（P 与楔块之间的力 R 和 F 是内力，根据牛顿第三定律（Newton's third law）互相抵消。）

第 (i) 部分：45° 路径

想一想 为甚么观察到的路径必定是一条沿真实加速度方向的直线?

下文的运动方程（equations of motion）确定了 a 和 A 都是常数，所以 P 的真实加速度是一个常向量。由静止开始，它的速度总是该向量的 t 倍，位移则是该向量的 $\frac{1}{2}t^2$ 倍，所以它沿着该方向的一条固定直线运动。

P 的加速度的水平分量是

$$a\cos\theta - \frac{a\cos\theta}{k+1} = \frac{k}{k+1}\,a\cos\theta,$$

而铅垂分量的大小是 $a\sin\theta$。路径是一条 45° 的直线，即表示这两者相等：

$$a\sin\theta = \frac{k}{k+1}\,a\cos\theta \quad\Longrightarrow\quad \tan\theta = \frac{k}{k+1},$$

其中两边除以了 $a\cos\theta \neq 0$（因为 P 确实在滑动，$a > 0$）。这正是所要求的结果。

第 (i) 部分：$k = 3$ 的情况

现在 $\tan\theta = \frac{3}{4}$，所以 $\sin\theta = \frac{3}{5}$，$\cos\theta = \frac{4}{5}$，而 $A = \frac{a\cdot 4/5}{4} = \frac{a}{5}$。

我们对 P 分解各力。它的真实加速度沿斜面向下的分量是 $a - A\cos\theta$，沿向外法线方向的分量是 $-A\sin\theta$（楔块向左的加速度有这两个分量；相对加速度则完全沿着斜面）。

垂直于斜面方向：

$$R - mg\cos\theta = -mA\sin\theta \quad\Longrightarrow\quad R = m\left(\tfrac{4}{5}g - \tfrac{3}{25}a\right).$$

留意 R 比 $mg\cos\theta$ 小：楔块正在离 P 而去。

沿斜面向下方向，由于 P 正在滑动，所以 $F = \mu R$：

$$mg\sin\theta - \mu R = m(a - A\cos\theta) = m\left(a - \tfrac{4}{25}a\right) = \tfrac{21}{25}ma.$$

代入 R 并乘以 $25/m$：

$$15g - 20\mu g + 3\mu a = 21a \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{5g(3-4\mu)}{3(7-\mu)}.$$

这个值恰好在 $\mu < \frac{3}{4} = \tan\theta$ 时为正，而 P 要滑动就必须如此；这正好带我们进入第 (ii) 部分。

第 (ii) 部分

我们断言：若 $\tan\theta \le \mu$，则 P 留在原处，楔块也不会移动。

静止是可能的。若两个物体都不动，则对 P 而言，我们需要 $R = mg\cos\theta$，以及沿斜面向上的摩擦力 $F = mg\sin\theta$。只要 $F \le \mu R$，即 $\sin\theta \le \mu\cos\theta$，亦即 $\tan\theta \le \mu$，粗糙的接触面就能提供这个力，而这正是我们的条件。楔块所受的则是方向相反的 R 和 F；它们的水平分量分别是向左的 $R\sin\theta = mg\sin\theta\cos\theta$ 和向右的 $F\cos\theta = mg\sin\theta\cos\theta$，两者互相抵消。所以楔块也处于平衡（equilibrium），而地面只提供一个铅垂的力。

想一想 即使静止是可能的，P 会不会仍然滑动?

滑动是不可能的。假设 P 确实向下滑动，且 $F = \mu R$，其中 k 和 θ 为一般的值。设 $s = \sin\theta - \mu\cos\theta$。楔块的水平方程是 $kmA = R\sin\theta - \mu R\cos\theta = Rs$。把它与法向方程 $R = m(g\cos\theta - A\sin\theta)$ 结合，得

$$R = \frac{kmg\cos\theta}{k + s\sin\theta}, \qquad a = \frac{(k+1)\,gs}{k + s\sin\theta}.$$

要保持接触，我们需要 $R > 0$，这迫使 $k + s\sin\theta > 0$；于是 a 与 s 同号。但 $\tan\theta \le \mu$ 表示 $s \le 0$，所以 $a \le 0$，这与向下滑动矛盾。也没有任何东西能使 P 沿斜面向上滑动，因为只有重力才能引起相对运动，而重力的分量是沿斜面向下的。所以当 $\tan\theta \le \mu$ 时，P 在楔块上保持静止，楔块也在地面上保持静止。（当 $\tan\theta = \mu$ 时，摩擦力达到极限值（limiting friction），但 P 仍然不动。）

验算

- 取 $\mu = 0$ 和 $k = 3$，我们得到 $a = \frac{5g}{7}$ 和 $A = \frac{g}{7}$。于是 P 的真实加速度的水平分量是 $\frac{4}{5}\cdot\frac{5g}{7} - \frac{g}{7} = \frac{3g}{7}$，铅垂分量是 $\frac{3}{5}\cdot\frac{5g}{7} = \frac{3g}{7}$，方向确实是 45°。

- 当 $k \to \infty$（楔块无法移动）时，$A \to 0$，而一般公式给出 $a \to g(\sin\theta - \mu\cos\theta)$，即大家熟悉的固定斜面结果。
- 数值上，取 $g = 9.8$、$k = 3$ 和 $\mu = 0.2$，直接解三条运动方程得 $a \approx 5.284\ \mathrm{m\,s^{-2}}$，与 $\frac{5g(3-0.8)}{3(6.8)}$ 吻合。把运动随时间逐步推算，水平动量一直保持为零，所得路径的倾角恰好是 45°。

常见错误

- 取 $R = mg\cos\theta$。这只在楔块固定时才成立；这里楔块加速离开，所以 R 较小。
- 分解时只用相对加速度 a，忘记了楔块的加速度。牛顿第二定律需要的是真实加速度。
- 在第 (ii) 部分，即使 P 没有滑动，仍假设摩擦力是 μR。摩擦力最多是 μR，实际取值视乎需要而定。

STEP 之外

第 (i) 部分最巧妙的一步是一条守恒定律（conservation law）：由于外力没有水平分量，动量的其中一个分量守恒。在大学一年级的力学课程中，这会发展成一个把对称性（symmetry）与守恒定律联系起来的一般原理：在拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）中，若拉格朗日量（Lagrangian）不依赖某个坐标（这里是整个系统的水平位置），就会自动得出一个守恒的动量。光滑楔块与物块正是那里标准的入门例子。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）详细讲解了正是这一类的问题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。