详细解答

STEP II 2008，第 10 题

力学 • 与墙壁的斜碰撞

STEP II 2008，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s2-q10

关键思路

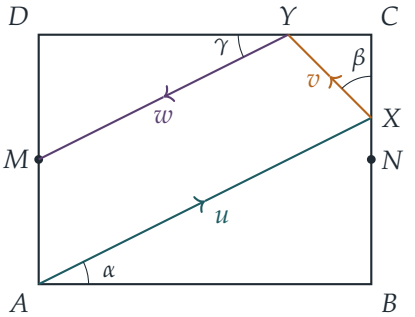
在光滑（smooth）的桌边上，冲量（impulse）垂直于桌边，所以沿桌边方向的速度分量（component）不变，只有垂直撞向桌边的分量会乘以 e。把速度分解成平行于 AB 和平行于 AD 的两个分量，一切便一目了然：每次反弹只会改变两个分量的其中一个。两次反弹之后，两个分量都各乘了 e，最终的方向和动能（kinetic energy）便同时确定下来。至于第 (ii) 部分的几何，只需把各段水平距离加起来。

解答

我们把球看作质点（particle），把桌边看作光滑的墙。取 A 为原点，x 轴沿 AB，y 轴沿 AD，于是

$$B = (a, 0), \quad C = (a, 2b), \quad D = (0, 2b), \quad M = (0, b), \quad N = (a, b).$$

为简便起见，记 $t = \tan\alpha$。



第 (i) 部分

最初的速度是 $(u\cos\alpha,\ u\sin\alpha)$。

*在 X 的碰撞。*边 BC 平行于 y 轴。由于它是光滑的，球所受的冲量沿 x 方向，所以 y 分量 $u\sin\alpha$ 不变。根据牛顿恢复定律（Newton's law of restitution），x 分量会反向并乘以 e。碰撞后的速度是

$$(-eu\cos\alpha,\ u\sin\alpha).$$

角 $\beta = \angle CXY$ 是从 XC 量起的，而这个方向指向 y 轴的正方向。所以

$$\tan\beta = \frac{eu\cos\alpha}{u\sin\alpha} = \frac{e}{\tan\alpha}, \qquad \text{即} \qquad \tan\alpha\tan\beta = e,$$

这正是所要证明的。

*在 Y 的碰撞。*边 DC 平行于 x 轴，所以这次是 x 分量不变，而 y 分量反向并乘以 e。碰撞后的速度是

$$(-eu\cos\alpha,\ -eu\sin\alpha) = -e\,(u\cos\alpha,\ u\sin\alpha).$$

这是初速度的负数倍，所以路径的最后一段平行于 AX，而且方向相反。角 $\gamma = \angle DYM$ 是从 YD 量起的，而这个方向指向 x 轴的负方向；方向 $(-\cos\alpha, -\sin\alpha)$ 与它的夹角为 α。因此

$$\gamma = \alpha.$$

第 (ii) 部分

我们沿着路径追踪 x 坐标。

*由 A 到 X。*球横越宽度 a 的同时上升了 $a\tan\alpha$，所以 $X = (a,\ at)$。

*由 X 到 Y。*球再上升 $2b - at$，而在这一段，它每上升一个单位，就在 x 方向移动 $\tan\beta$ 个单位（因为 β 是从竖直的边量起的）。利用第 (i) 部分的 $\tan\beta = e/t$，球向左移动的距离是 $(2b - at)\,e/t$，所以

$$x_Y = a - \frac{e(2b - at)}{t}.$$

*由 Y 到 M。*球由高度 $2b$ 下降到高度 b，即下降了 b，路径在水平线之下成角 $\gamma = \alpha$。所以走过的水平距离是 $b/\tan\alpha$，而这段距离必须刚好把球带到 $x = 0$：

$$x_Y = \frac{b}{t}.$$

想一想 为甚么只追踪 x 坐标就足够?

每一段直线路径都从上一段的终点开始，而它的方向已由第 (i) 部分得知。只要知道球在某一段上升或下降了多少，角度就决定了它横向移动多远。各段端点的高度都是固定的

（先是 o，然后在 DC 处是 $2b$，再在 M 处是 b），所以余下的唯一条件，就是各段横向距离加起来要吻合。

令 x_Y 的两个表达式相等，并乘以 t：

$$\begin{aligned} b &= at - e(2b - at) \\ &= at(1+e) - 2be, \end{aligned}$$

所以 $at(1+e) = b(1+2e)$，由此得

$$\tan\alpha = \frac{(1+2e)b}{(1+e)a},$$

这正是所要证明的。

这一击总是可行的。对任何 $e > 0$，这个 $\tan\alpha$ 的值都是正数，所以它确定了 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内的一个角 α。我们还要确认各个反弹点确实落在应该落在的边上。

- X 的高度是 $at = \dfrac{1+2e}{1+e}\,b$。由于当 $e > 0$ 时 $1+e < 1+2e < 2+2e$，这个高度严格介乎 b 与 $2b$ 之间。所以 X 确实在 BC 上，位于 C 之下，并且在球袋 N 之上，球不会在途中掉进 N。
- Y 位于 $x_Y = b/t = \dfrac{1+e}{1+2e}\,a$，当 $e > 0$ 时这个值严格介乎 0 与 a 之间。所以 Y 确实在 DC 上，位于 D 与 C 之间。

最后一段则由 Y 沿直线走到 M，全程都在球桌之内。因此，无论 e 取甚么值，路径的每一段都是可行的。

第 (iii) 部分

由第 (i) 部分可知，末速度是初速度的 $-e$ 倍，所以 $w = eu$。（这也可以直接看出：每个分量都恰好乘了一次 e。）动能由 $\frac{1}{2}mu^2$ 减至 $\frac{1}{2}me^2u^2$，其中 m 是球的质量。因此损失的比例是

$$\frac{\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}me^2u^2}{\frac{1}{2}mu^2} = 1 - e^2.$$

这个结果与 a、b 和各个角度都无关。（若 $e > 1$，这个“损失”是负数，即桌边反而给球增添能量。这并不符合物理实际，但代数运算依然成立。）

验算

- 取 $a = 4$、$b = 1.5$ 和 $e = \frac{1}{2}$（即图中的情况），公式给出 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$。于是 $X = (4, 2)$，$Y = (3, 3)$，而由 Y 出发、斜率（gradient）为 $\frac{1}{2}$ 的直线在水平距离 3 之内下降 1.5，刚好落在 $M = (0, 1.5)$。损失的动能比例是 $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$。

- 当 $e = 1$（完全弹性，perfectly elastic）时，$\tan\alpha = 3b/(2a)$。把球桌先对 BC 反射、再对 DC 反射而“展开”：路径变成由 A 到 M 的像的一条直线，横向走了 $2a$，向上走了 $3b$。这给出相同的斜率 $3b/(2a)$。没有能量损失，与 $1 - e^2 = 0$ 吻合。
- 我们对 a、b、e 和 u 随机取了 20,000 组值来模拟反弹，结果证实了 $\tan\alpha\tan\beta = e$、$\gamma = \alpha$、球到达 M，以及比例 $1 - e^2$，误差全部在 10^{-13} 之内。

常见错误

- 在碰撞时把 e 乘到整个速率上。其实只有垂直于桌边的分量会改变，沿光滑桌边的分量丝毫不变。
- 从 BC 的法线（normal）而不是从 XC 量度 β，结果把 $\tan\beta$ 变成了它的倒数。
- 忘记验证 X 在 N 之上，以及 Y 在 D 与 C 之间。这项验证正是“这一击可行”的内容。

STEP 之外

当 $e = 1$ 时，把球桌反射来“展开”桌球路径，可以把路径变成一条直线。这是数学桌球（mathematical billiards）的起点，它与动力系统（dynamical systems）相关，而对于有理球桌，更与曲面上的几何相关。当 $e < 1$ 时，反射不再像镜面反射，但把速度分解成分量后仍然容易处理。关于冲量与恢复的力学，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）。想做更多这类题目，可以试试 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题集）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。