详细解答

STEP II 2008，第 1 题

纯数学 · 复数迭代

> **STEP II 2008，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/08-s2-q1

关键思路

$x^2 - y^2$ 和 $2xy$ 这两个式子，正是 $(x + \mathrm{i}y)^2$ 的实部（real part）和虚部（imaginary part）。因此，若把每个点写成复数（complex number）$z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$，这个含两个分量的规则就化为单一方程 $z_{n+1} = z_n^2 + c$，当中只有一个复常数 c。这样，“常数”和“周期为 2”两个条件都变成只含一个复未知数的二次方程（quadratic equation），可以用二次公式（quadratic formula）求解。

解答

设 $z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ 及 $c = a + (b+2)\mathrm{i}$。由于

$$z_n^2 + c = (x_n^2 - y_n^2 + a) + \mathrm{i}\,(2x_n y_n + b + 2),$$

而两个复数相等，当且仅当它们的实部和虚部分别相等，所以该规则等价于

$$z_{n+1} = z_n^2 + c.$$

因为 a、b、x_n 和 y_n 都是实数，每个点 (x, y) 恰好对应一个复数，反之亦然。所以改用 z 来计算，不会有任何损失。

第 (i) 部分

当 $a = 1$、$b = -1$ 时，$c = 1 + \mathrm{i}$。数列（sequence）为常数数列，当且仅当 $z_2 = z_1$，因为此后每一步都只是重复同一个计算。所以我们需要

$$z^2 - z + (1 + \mathrm{i}) = 0, \qquad z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1+\mathrm{i})}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-3 - 4\mathrm{i}}}{2}.$$

要求 $-3-4\mathrm{i}$ 的一个平方根, 可设 $(p+q\mathrm{i})^2=-3-4\mathrm{i}$, 其中 p、q 为实数: 即 $p^2-q^2=-3$ 及 $pq=-2$。取 $p=1$、$q=-2$ 即可，因为 $(1-2\mathrm{i})^2=1-4\mathrm{i}-4=-3-4\mathrm{i}$。因此

$$z=\frac{1\pm(1-2\mathrm{i})}{2}=1-\mathrm{i}\quad\text{或}\quad\mathrm{i}.$$

所以数列为常数数列，当且仅当

$$(x_1,y_1)=(1,-1)\quad\text{或}\quad(x_1,y_1)=(0,1).$$

直接验证：$(1,-1)\mapsto(1-1+1,\,-2+1)=(1,-1)$ 及 $(0,1)\mapsto(0-1+1,\,0+1)=(0,1)$。

第 (ii) 部分

现在 $z_1=-1+\mathrm{i}$，所以 $z_1^2=1-2\mathrm{i}-1=-2\mathrm{i}$，而

$$z_2=c-2\mathrm{i}.$$

记 $w=z_2$。当 $z_3=z_1$ 但 $z_2\neq z_1$ 时，数列的周期（period）为 2。一旦 $z_3=z_1$，按照规则，数列便会以 $z_1,z_2,z_1,z_2,\ldots$ 的形式不断重复。利用 $c=w+2\mathrm{i}$,

$$z_3=w^2+c=w^2+w+2\mathrm{i},$$

所以 $z_3=z_1$ 变成

$$w^2+w+2\mathrm{i}=-1+\mathrm{i}\quad\Longleftrightarrow\quad w^2+w+(1+\mathrm{i})=0.$$

? **想一想** 为甚么选 $w=z_2$ 作未知数，而不选 c?

无论用哪一个作未知数, 条件 $z_3=z_1$ 都是一个关于 c 的二次方程; 但若以 w 表示, 常数数列 $w=z_1$ 必定是其中一个根（root)。所以我们已经知道这个二次方程的一个根，而另一个根正是我们要找的。事实上 $w=-1+\mathrm{i}$ 确实满足方程：$(-1+\mathrm{i})^2+(-1+\mathrm{i})+1+\mathrm{i}=-2\mathrm{i}+2\mathrm{i}=0$。两根之和为 -1，所以另一个根是 $w=-\mathrm{i}$。（用二次公式也得到相同结果：$w=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{-3-4\mathrm{i}})=\frac{1}{2}(-1\pm(1-2\mathrm{i}))$，所用的平方根与 (i) 相同。）

- $w=-1+\mathrm{i}=z_1$ 给出 $c=-1+3\mathrm{i}$，即 $a=-1$、$b=1$。这时 $z_2=z_1$，数列是常数数列，所以它的周期是 1，而不是 2。
- $w=-\mathrm{i}$ 给出 $c=\mathrm{i}$，即 $a=0$ 及 $b+2=1$。

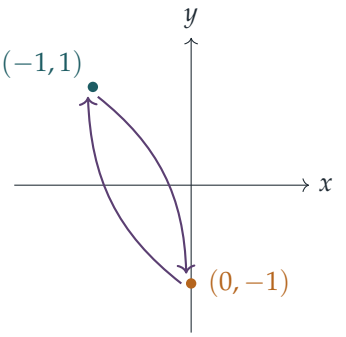
所以数列的周期为 2，当且仅当

$$a=0,\qquad b=-1.$$

用坐标验算：当 $a=0$、$b=-1$ 时，

$$(-1,1)\mapsto(1-1+0,\ -2+1)=(0,-1)\mapsto(0-1+0,\ 0+1)=(-1,1),$$

而这两点并不相同，所以周期恰好是 2。



验算

- 按原来的坐标规则迭代（iterate），可见当 $a=1$、$b=-1$ 时，$(1,-1)$ 和 $(0,1)$ 都固定不动；而当 $a=0$、$b=-1$ 时，$(-1,1)\to(0,-1)\to(-1,1)$。
- 平方根 $1-2\mathrm{i}$ 可以通过把它平方来验证；因式分解（factorisation）$w^2+w+1+\mathrm{i}=(w+1-\mathrm{i})(w+\mathrm{i})$ 同样可以验证：两根之积为 $(-1+\mathrm{i})(-\mathrm{i})=1+\mathrm{i}$。
- 以随机起始值进行数值求根搜索，在 (i) 中找不到其他不动点（fixed point），在 (ii) 中除了给出常数数列的 $(-1,1)$ 之外，也找不到其他满足 $z_3=z_1$ 的 (a,b)。

常见错误

- 忘记第二个分量中的“+2”，于是取了 $c=a+b\mathrm{i}$，而不是 $a+(b+2)\mathrm{i}$。
- 把 $a=-1$、$b=1$ 当作 (ii) 的第二个答案。该数列是常数数列，所以它的周期是 1。
- 只用实坐标计算，结果在联立二次方程中迷失方向。这样做是可行的，但复数形式简短得多。

STEP 之外

映射（map）$z\mapsto z^2+c$ 是复动力系统（complex dynamics）中最著名的例子。曼德博集合（Mandelbrot set）是使 0 的轨道（orbit）保持有界的所有 c 所组成的集合；它最大的两个部分，即主心脏线（main cardioid）和其左方的圆盘，分别由使该映射具有吸引不动

点（attracting fixed point）或吸引 2-循环（attracting 2-cycle）的 c 组成。在本题中，2-循环的方程同样有一个来自不动点的因式：一般而言 $(z^2+c)^2+c-z=(z^2-z+c)(z^2+z+c+1)$。想了解这背后的几何，可参阅 Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《视觉复分析》），这是一本易读的入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。