详细解答

STEP I 2008，第 9 题

力学 · 滚动圆环的动量

> **STEP I 2008，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q9

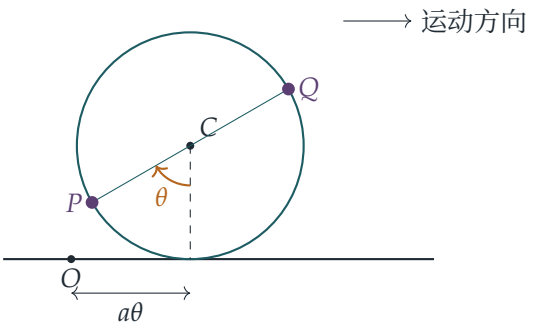
关键思路

纯滚动（rolling without slipping）把平移与转动连系起来：当圆环转过 θ 时，圆心移动的距离为 $a\theta$，即曾经接触桌面的那段环边的长度。因此每个质点的位置都是“圆心加上一条转动的半径”，求导便得出速度。至于最后一部分，留意外力没有水平分量，所以总水平动量（momentum）不会改变，而这个动量原来是 $\dot{\theta}$ 的倍数。

解答

P 的位置与速率

把 P 和 Q 视为轻圆环上的质点（particle）。取 P 的起始点为原点，x 轴沿滚动的直线（指向圆环前进的方向），y 轴垂直向上。设圆环沿正 x 方向滚动，因此在下图中它是顺时针转动的。



由于圆环没有滑动，滚到桌面上的那段环边弧长等于圆心移动的距离，所以圆心 C 位于

$(a\theta,\, a)$。起初 CP 指向正下方；顺时针转过 θ 之后，向量 $\overrightarrow{CP}$ 为 $(-a\sin\theta,\, -a\cos\theta)$。因此

$$\boxed{P = (a\theta - a\sin\theta,\; a - a\cos\theta)}$$

（这是一条摆线（cycloid））。利用链式法则（chain rule）对 t 求导，

$$\dot{x}_P = a\dot{\theta}(1-\cos\theta), \qquad \dot{y}_P = a\dot{\theta}\sin\theta,$$

所以

$$v_P^2 = a^2\dot{\theta}^2[(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta] = 2a^2\dot{\theta}^2(1-\cos\theta) = 4a^2\dot{\theta}^2\sin^2\tfrac{1}{2}\theta,$$

其中用到 $1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{1}{2}\theta$。因此 P 的速率为

$$v_P = 2a\,|\dot{\theta}\sin\tfrac{1}{2}\theta| \qquad (= 2a\dot{\theta}\sin\tfrac{1}{2}\theta,\ \text{当} 0 \le \theta \le 2\pi,\ \dot{\theta} \ge 0).$$

当 θ 是 2π 的倍数时，这个速率为零，而这正好是 P 成为接触点的时刻，与纯滚动的要求一致。

动能

Q 位于直径的另一端，所以 $\overrightarrow{CQ} = -\overrightarrow{CP}$，而

$$Q = (a\theta + a\sin\theta,\; a + a\cos\theta), \qquad \dot{x}_Q = a\dot{\theta}(1+\cos\theta), \quad \dot{y}_Q = -a\dot{\theta}\sin\theta.$$

同理，

$$v_Q^2 = a^2\dot{\theta}^2[(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta] = 2a^2\dot{\theta}^2(1+\cos\theta) = 4a^2\dot{\theta}^2\cos^2\tfrac{1}{2}\theta.$$

圆环是轻的，所以动能（kinetic energy）只来自两个质点：

$$T = \tfrac{1}{2}mv_P^2 + \tfrac{1}{2}mv_Q^2 = 2ma^2\dot{\theta}^2(\sin^2\tfrac{1}{2}\theta + \cos^2\tfrac{1}{2}\theta) = 2ma^2\dot{\theta}^2,$$

正如所求。

速率恒定

外力包括两个质点的重量 mg 和桌面的反作用力（reaction），全部都是垂直的。因此系统所受的总水平力为零，而把牛顿第二定律（Newton's second law）应用于整个系统，可知其总水平动量恒定。（圆环是轻的，所以它不带动量。）

> ? **想一想** 质点也有垂直方向的运动，为甚么只考虑水平动量就足够?

因为水平动量恰好只取决于 $\dot{\theta}$。把水平速度相加，

$$m\dot{x}_P + m\dot{x}_Q = ma\dot{\theta}(1-\cos\theta) + ma\dot{\theta}(1+\cos\theta) = 2ma\dot{\theta}.$$

$\cos\theta$ 项互相抵消：系统的质心（centre of mass）是 C，它始终以速度 $a\dot{\theta}$ 水平移动。由于 $2ma\dot{\theta}$ 恒定，$\dot{\theta}$ 亦恒定，所以圆环的速率（即其圆心的速率 $a\dot{\theta}$）恒定。 □

或用能量方法。 P 和 Q 的高度之和为 $(a - a\cos\theta) + (a + a\cos\theta) = 2a$，所以势能（potential energy）$2mga$ 永不改变。反作用力作用于接触点，而纯滚动时接触点瞬时静止，所以反作用力不作功。因此 $T = 2ma^2\dot{\theta}^2$ 恒定，即 $|\dot{\theta}|$ 恒定；又因为 $\dot{\theta}$ 连续地变化，不可能不经过 0 而由一个符号跳到另一个符号，所以 $\dot{\theta}$ 本身恒定。动量的论证省却了这最后一步，这就是我们先用它的原因。

验算

- 当 $\theta = \pi$ 时，P 在最高点：公式给出 $P = (a\pi,\, 2a)$，速率为 $2a\dot{\theta}$，是圆心速率的两倍，这正是滚动车轮顶点的熟悉结果。
- 动能等于 $\frac{1}{2}(2m)(a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}(2ma^2)\dot{\theta}^2$：质心的平移加上绕质心的转动，其中转动惯量（moment of inertia）为 $2ma^2$。两项各为 $ma^2\dot{\theta}^2$。
- 数值上，取 $a = 1.3$、$\dot{\theta} = 2.1$ 和 $\theta = 1$，以有限差分（finite differences）对位置求导，得 $v_P^2 + v_Q^2 = 4a^2\dot{\theta}^2 \approx 29.8$；而当 $\dot{\theta}$ 恒定时，P 和 Q 的水平加速度互相抵消。

常见错误

- 把圆心放在 $(a,\, a)$，或者完全忘记圆心会移动：$a\theta$ 这一项正是滚动带来的。
- 在 P 的位置中弄错 $\sin\theta$ 的正负号；应检查 P 起初的速度是否为零。
- 由动能恒定推断速率恒定，却没有说明为甚么 $\dot{\theta}$ 不能改变符号。

STEP 之外

这是一个双质点的例子，说明了一个普遍的事实：系统的总动量只会因外力而改变，内力（这里由圆环传递）则成对抵消。“验算”中动能的分拆就是柯尼希定理（König's theorem）：动能等于质心的动能加上相对于质心运动的动能,这是刚体动力学(rigid-body dynamics)的起点。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对滚动运动和这些概念有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。