详细解答

STEP I 2008，第 8 题

纯数学 · 克莱罗微分方程

> **STEP I 2008，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q8

关键思路

两条方程都含有 y' 而不含 y''，而且都不属于可以直接分离变量（separate variables）或直接积分的类型。窍门是再求导一次：只含 y' 的项会互相抵消，余下的式子可以因式分解（factorise），其中一个因式是 y''。每个因式对应一种情况，而在每种情况中，我们都代回原来的方程，而不是进行积分，这样任意常数（arbitrary constant）便不费工夫地确定下来。

解答

以下一律记 $p = y'$，因此 $p' = y''$。

第 (i) 部分

把 $p^2 - xp + y = 0$ 对 x 求导，其中 xp 一项用积法则（product rule）：

$$2p\,y'' - (p + x\,y'') + p = 0 \quad \Longrightarrow \quad y''\,(2p - x) = 0.$$

两个 p 项互相抵消，所以在每一点上，或者 $y'' = 0$，或者 $2y' = x$，正如题目所求。

情况 $y'' = 0$。这时 y' 是常数 m，而 $y = mx + c$。代入 $(*)$：

$$m^2 - xm + (mx + c) = 0 \quad \Longrightarrow \quad c = -m^2.$$

所以曲线是直线 $y = mx - m^2$。

情况 $2y' = x$。把 $p = \frac{1}{2}x$ 代入 $(*)$：

$$\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{2}x^2 + y = 0 \quad \Longrightarrow \quad 4y = x^2.$$

想一想 为甚么不直接把 $y' = \frac{1}{2}x$ 积分，得出 $y = \frac{1}{4}x^2 + k$?

这样做也可以，但对 $(*)$ 求导时丢失了一些资料：任何 $y = \frac{1}{4}x^2 + k$ 都满足 $2y' = x$，却只有 $k = 0$ 才满足 $(*)$ 本身（例如 $k = 1$ 时，在 $x = 0$ 处得 $0 - 0 + 1 \neq 0$）。直接代回 $(*)$ 可一次过用尽所有资料，并且直接得出常数的值。第一种情况中 $c = -m^2$，也是同一道理。

所以曲线或者是直线 $y = mx + c$，其中 $c = -m^2$，或者是抛物线（parabola）$4y = x^2$。

这两个答案互有关连：直线 $y = mx - m^2$ 与 $4y = x^2$ 相交于 $x^2 - 4mx + 4m^2 = 0$ 之处，即 $(x - 2m)^2 = 0$，所以每条直线都是抛物线在 $(2m, m^2)$ 的切线（tangent）。这条抛物线就是这族直线的包络线（envelope）。

第 (ii) 部分

把 $(x^2 - 1)p^2 - 2xyp + y^2 - 1 = 0$ 对 x 求导：

$$2xp^2 + 2(x^2 - 1)p\,y'' - 2yp - 2xp^2 - 2xy\,y'' + 2yp = 0.$$

不含 y'' 的项两两抵消，余下

$$2y''[(x^2 - 1)p - xy] = 0.$$

情况 $y'' = 0$。这时 $y = mx + c$。留意到方程可以改写成

$$(y - xp)^2 = 1 + p^2,$$

会方便得多，因为 $(y - xp)^2 - p^2 - 1 = y^2 - 2xyp + (x^2 - 1)p^2 - 1$。对于这条直线，$y - xp = c$ 而 $p = m$，所以

$$c^2 = 1 + m^2, \qquad \text{即} \qquad y = mx \pm \sqrt{1 + m^2}.$$

情况 $(x^2 - 1)p = xy$。当 $x^2 \neq 1$ 时，有 $p = \dfrac{xy}{x^2 - 1}$，所以

$$y - xp = y - \frac{x^2 y}{x^2 - 1} = \frac{-y}{x^2 - 1}.$$

代入 $(y - xp)^2 = 1 + p^2$，再乘以 $(x^2 - 1)^2$：

$$\begin{aligned} y^2 &= (x^2 - 1)^2 + x^2 y^2 \\ y^2(1 - x^2) &= (1 - x^2)^2 \\ y^2 &= 1 - x^2, \end{aligned}$$

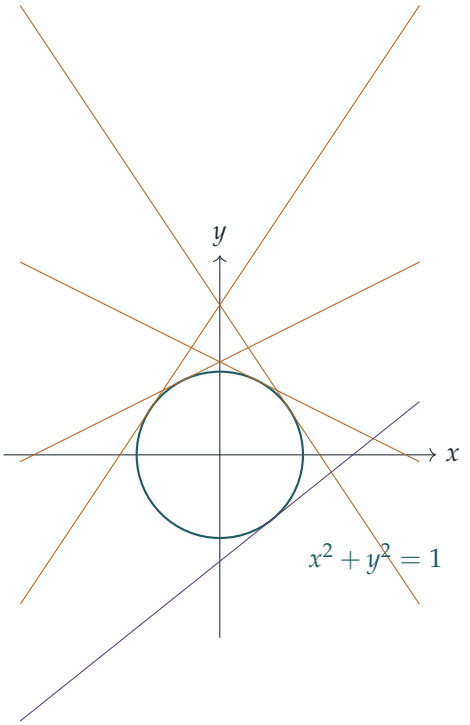
最后一步除以 $1-x^2 \neq 0$。所以曲线是圆 $x^2+y^2=1$。(在 $x=\pm 1$ 处, 条件 $(x^2-1)p=xy$ 迫使 $y=0$，得出点 $(\pm 1,0)$，它们也在同一个圆上。)

反过来，这个圆确实满足方程：在圆上 $p=-x/y$，所以 $y-xp=(y^2+x^2)/y=1/y$，而 $1+p^2=(x^2+y^2)/y^2=1/y^2$，两者吻合。

所以曲线或者是直线 $y=mx+c$,其中 $c^2=1+m^2$,或者是单位圆(unit circle)$x^2+y^2=1$。

想一想 直线 $y=mx\pm\sqrt{1+m^2}$ 与这个圆有甚么关系?

原点到 $y=mx+c$ 的距离是 $|c|/\sqrt{1+m^2}$，在这里刚好等于 1。所以这些直线正好就是单位圆的所有（非铅垂）切线，一如 (i) 中的直线是抛物线的切线。



验算

- 在 (i) 中取 $m=1$：$y=x-1$ 有 $p=1$，而 $1-x+x-1=0$。它与 $4y=x^2$ 相切于 $(2,1)$。
- 在 (ii) 中，圆上的点 $(\frac{3}{5},\frac{4}{5})$ 有 $p=-\frac{3}{4}$；于是 $(x^2-1)p^2-2xyp+y^2-1=-\frac{16}{25}\cdot\frac{9}{16}+\frac{18}{25}+\frac{16}{25}-1=0$。
- 数值方面, 我们沿随机选取的三次曲线检验了两个求导后的因式分解, 并确认直线、抛

物线和圆所得的残差（residual）均为 0（准确至 10^{-13}），而 $y = \frac{1}{4}x^2 + 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 则不然。

常见错误

- 把 $y' = \frac{1}{2}x$ 或 $y'' = 0$ 积分后留下一个任意常数：这个常数必须由原来的方程确定。
- 漏掉 $c = \pm\sqrt{1 + m^2}$ 中的 $\pm$：每个斜率（gradient）都有两条互相平行的切线。

STEP 之外

第 (i) 部分是一条*克莱罗方程*（Clairaut equation）$y = xp - f(p)$：它的通解（general solution）是直线族 $y = mx - f(m)$，此外还有一个*奇解*（singular solution），即该直线族的包络线，无论怎样选取常数都得不出它。第 (ii) 部分是同一现象，$y = xp \pm \sqrt{1 + p^2}$，包络线是那个圆。奇解说明，一阶方程（first-order equation）经过每一点的解不一定唯一；唯一性何时成立，正是大学第一门常微分方程（ODE）课程中存在与唯一性定理（existence and uniqueness theorems）所探讨的课题。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教科书）是阅读这方面内容的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。