详细解答

STEP I 2008，第 7 题

纯数学 · 旋转与距离

STEP I 2008，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s1-q7

关键思路

要求一点到一条过原点直线的垂直距离（perpendicular distance），只要把平面旋转（rotation），令该直线落在 x 轴上，问题就变得容易：所求距离正是新 y 坐标的大小。第一部分的旋转公式，正好替三条边中的两条完成这件事。至于最后一部分，窍门是去掉绝对值符号（modulus signs）：三个有向距离（signed distance）之和永远是同一个常数，而取绝对值只会令总和变大。

解答

旋转公式

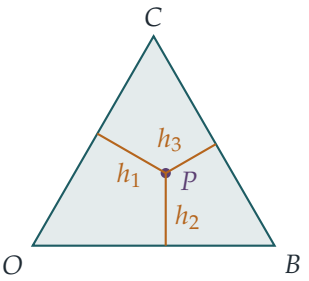
设 $x = r\cos\theta$，$y = r\sin\theta$，其中 $r = OP$，而 θ 是由正 x 轴量至 OP 的角。把 OP 顺时针（clockwise）旋转 60°，r 保持不变，角则变为 $\theta - 60^\circ$，所以新的 y 坐标是

$$\begin{aligned} r\sin(\theta - 60^\circ) &= r\sin\theta\cos 60^\circ - r\cos\theta\sin 60^\circ \\ &= \tfrac{1}{2}y - \tfrac{\sqrt{3}}{2}x = \tfrac{1}{2}(y - \sqrt{3}\,x), \end{aligned}$$

这正是所要证明的结果。若改为逆时针（anticlockwise）旋转，角变为 $\theta + 60^\circ$，同样展开，只是 $\sin 60^\circ$ 的符号相反，便得新的 y 坐标

$$\tfrac{1}{2}(y + \sqrt{3}\,x).$$

三个距离



h_1。直线 OC 与 x 轴的夹角为 $60°$。把整幅图绕 O 顺时针旋转 $60°$，OC 便落在 x 轴上，而距离保持不变。在旋转后的图中，P 到 x 轴的距离就是其新 y 坐标的绝对值，所以

$$h_1 = \tfrac{1}{2}|\,y - \sqrt{3}\,x\,|.$$

h_2。直线 OB 就是 x 轴，所以 $h_2 = |y|$。

h_3。现在绕 O 逆时针旋转 $60°$。这个旋转把 $B = (1,0)$ 送到 $(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3})$，并把 C（位于角 $60°$ 处）送到角 $120°$ 处的点，即 $(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\sqrt{3})$。因此直线 BC 变成水平线 $y = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$，而 P 的 y 坐标则变为 $\tfrac{1}{2}(y + \sqrt{3}\,x)$。于是

$$h_3 = \left|\tfrac{1}{2}(y + \sqrt{3}\,x) - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right| = \tfrac{1}{2}|\,\sqrt{3}\,x + y - \sqrt{3}\,|.$$

（换个做法：BC 的方程是 $\sqrt{3}\,x + y = \sqrt{3}$，由于 $\sqrt{3+1} = 2$，用惯常的距离公式亦得出相同答案。）

最后一部分

定义以下带正负号的量：

$$s_1 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3}\,x - y), \qquad s_2 = y, \qquad s_3 = \tfrac{1}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{3}\,x - y),$$

使得对 $i = 1,2,3$ 均有 $h_i = |s_i|$。把三者相加，

$$s_1 + s_2 + s_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x - \tfrac{1}{2}y + y + \tfrac{1}{2}\sqrt{3} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,x - \tfrac{1}{2}y = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

对每一点 (x,y) 都成立。

? **想一想** s_1、s_2、s_3 的正负号与三角形有甚么关系？

每个 s_i 都是一个线性式，并且在三角形的其中一条边上等于零。以位于三角形内部的形心（centroid）$(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{6}\sqrt{3})$ 作测试，得 $s_1 = s_2 = s_3 = \tfrac{1}{6}\sqrt{3} > 0$。所以 $s_2 \geq 0$ 是 OB 包含 C

的一侧，$s_1 \geq 0$ 是 OC 包含 B 的一侧，而 $s_3 \geq 0$ 是 BC 包含 O 的一侧。闭三角形 OBC 正是这三个半平面（half-plane）的交集，所以

$$P \text{ 落在（含边界的）} OBC \iff s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0.$$

对任意实数 s，我们有 $|s| \geq s$，等号成立当且仅当（if and only if）$s \geq 0$。因此

$$h_1 + h_2 + h_3 = |s_1| + |s_2| + |s_3| \ \geq\ s_1 + s_2 + s_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$

等号成立当且仅当对每个 i 都有 $|s_i| = s_i$，亦即当且仅当三个 s_i 全部非负。根据上一段，这恰好在 P 位于三角形 OBC 的边上或内部时发生。这样便一次过证明了两个方向：

$$h_1 + h_2 + h_3 = \tfrac{1}{2}\sqrt{3} \iff P \text{ 落在（含边界的）三角形} OBC.$$

还要留意，在三角形外，这个和严格大于 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$。

验算

- 在顶点上，例如 $P = B = (1,0)$：$h_1 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$，$h_2 = 0$，$h_3 = 0$，和为 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$。正确。
- 在形心处，每个距离都是 $\frac{1}{6}\sqrt{3}$，三个加起来是 $\frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.8660$，即三角形的高。
- 在三角形外，取 $P = (2,0)$：$h_1 = \sqrt{3}$，$h_2 = 0$，$h_3 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$，和为 $\frac{3}{2}\sqrt{3} > \frac{1}{2}\sqrt{3}$。
- 我们在 10^5 个随机点上，把三条公式与直接计算的点到直线距离作比较（吻合至 10^{-15}），并在 2×10^5 个点（包括许多位于边上的点）上测试了“当且仅当”的结论，没有发现任何例外。

常见错误

- 弄错旋转的正负号：顺时针表示角减小，得 $\theta - 60°$。
- 只证明一个方向。验证了在三角形内和为 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 并不足够；你还必须证明在三角形外和不是 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$。不等式 $|s| \geq s$ 可以一次过处理两个方向。
- 忘记 h_1、h_2、h_3 中的绝对值符号：距离永远不会是负数。

STEP 之外

这就是维维亚尼定理（Viviani's theorem）：在等边三角形（equilateral triangle）中，内部任意一点到三边的距离之和等于三角形的高。有向距离 s_1, s_2, s_3（相差一个比例常数）就是 P 的重心坐标（barycentric coordinates）或三线坐标（trilinear coordinates），它

们的和永远是常数，并且恰好在三角形内全部非负；它们是几何、电脑图形学和凸分析中的标准工具。旋转公式是 2×2 旋转矩阵（rotation matrix）的第二行，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）是认识如何把旋转看成线性映射（linear map）的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。