详细解答

STEP I 2008，第 6 题

纯数学 · 反函数与面积

STEP I 2008，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s1-q6

关键思路

反函数（inverse function）的图像是原函数图像沿直线 $y = x$ 的反射（reflection），所以把 g 对 y 积分，得到的是一块横向量度的面积，即曲线 $y = \mathrm{f}(x)$ 与 y 轴之间的面积。积分上限 k 并非随意选取：它正好等于 $\mathrm{f}(\frac{1}{2})$。一旦看出这一点，两块面积便刚好拼成一个长方形。

解答

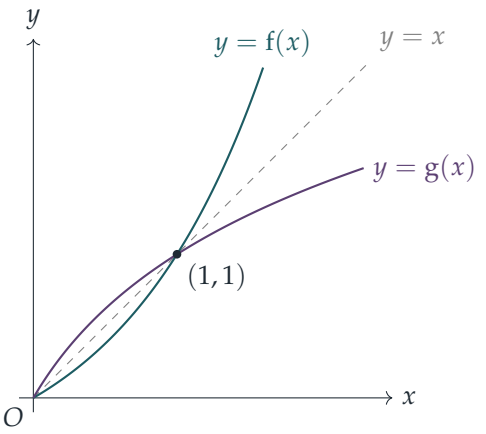
草图

函数 f 是递增（increasing）的，且 $\mathrm{f}(0) = 0$、$\mathrm{f}(1) = 1$。由于 $\mathrm{f}''(x) = \mathrm{e}^x/(\mathrm{e}-1) > 0$，它是凸（convex）的，而它在原点的斜率（gradient）为 $\mathrm{f}'(0) = 1/(\mathrm{e}-1) \approx 0.58 < 1$。因此在 $0 < x < 1$ 上，曲线位于直线 $y = x$ 之下，在 $(1,1)$ 与该直线相交，其后以指数方式增长。

要求出 g，可从 $y = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}-1}$ 解出 x：

$$\mathrm{g}(x) = \ln(1 + (\mathrm{e}-1)x), \qquad x \geq 0,$$

这是因为 f 的值域（range）是 $[0, \infty)$。它的图像是 $y = \mathrm{f}(x)$ 沿 $y = x$ 的反射：它通过 $(0,0)$，在该点的斜率为 $\mathrm{e} - 1 \approx 1.72$，是凹（concave）的，在 $(1,1)$ 与 $y = x$ 相交，其后只以对数方式增长。



第一个积分

$$\int_0^{1/2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big[\mathrm{e}^x - x\Big]_0^{1/2} = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big(\sqrt{\mathrm{e}} - \tfrac{1}{2} - 1\Big) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}} - \frac{3}{2}}{\mathrm{e}-1}.$$

第二个积分

首先留意

$$\mathrm{f}(\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{\mathrm{e}-1} = \frac{\sqrt{\mathrm{e}}-1}{(\sqrt{\mathrm{e}}-1)(\sqrt{\mathrm{e}}+1)} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}+1} = k,$$

这里用了平方差（difference of two squares）$\mathrm{e}-1 = (\sqrt{\mathrm{e}})^2 - 1$。换言之，$\mathrm{g}(k) = \frac{1}{2}$，而且 $1 + (\mathrm{e}-1)k = 1 + (\sqrt{\mathrm{e}}-1) = \sqrt{\mathrm{e}}$。

> ? **想一想** 怎样对 $\ln(1+(\mathrm{e}-1)x)$ 积分?

作代换（substitution）$u = 1 + (\mathrm{e}-1)x$，于是 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/(\mathrm{e}-1)$，积分上下限变为 $u = 1$ 和 $u = \sqrt{\mathrm{e}}$。然后利用 $\int \ln u\,\mathrm{d}u = u\ln u - u$（把被积函数看成 $\ln u$ 乘以 1，再用分部积分法（integration by parts））：

$$\begin{aligned}\int_0^k \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \ln u\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big[u\ln u - u\Big]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{e}-1}\Big(\tfrac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}} - \sqrt{\mathrm{e}} - (0-1)\Big) = \frac{1-\frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1},\end{aligned}$$

其中用了 $\ln\sqrt{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$。

相加

$$\int_0^{1/2} \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^k \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\mathrm{e}} - \frac{3}{2} + 1 - \frac{1}{2}\sqrt{\mathrm{e}}}{\mathrm{e}-1} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{\mathrm{e}}-1)}{(\sqrt{\mathrm{e}}-1)(\sqrt{\mathrm{e}}+1)} = \frac{1}{2(\sqrt{\mathrm{e}}+1)},$$

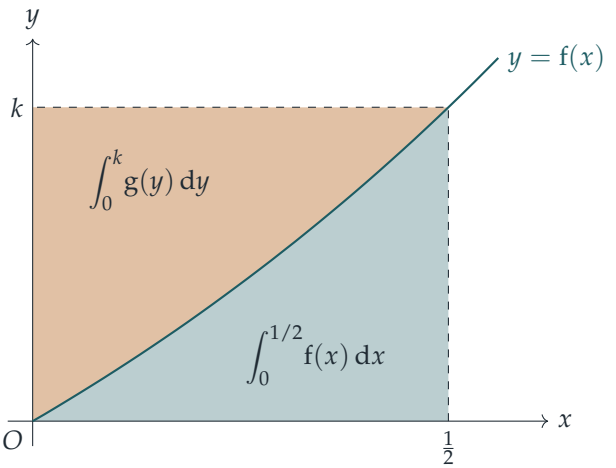
这正是所要求的结果。

解释这个结果

答案是 $\frac{1}{2}\times k$，即以 $(0,0)$ 和 $(\frac{1}{2},k)$ 为对角顶点的长方形的面积。原因如下。

> **想一想** 在 f 的图像上，$\int_0^k \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$ 在哪里?

沿 $y=x$ 反射不会改变面积。$y=\mathrm{g}(x)$ 之下、$0\le x\le k$ 的区域，经反射后变成曲线 $y=\mathrm{f}(x)$ 与 y 轴之间、$0\le y\le k$ 的区域。换句话说，它就是沿曲线 $y=\mathrm{f}(x)$ 的 $\int_0^k x\,\mathrm{d}y$：曲线*左边*的面积。由于 $\mathrm{f}(\frac{1}{2})=k$，曲线由长方形的顶点 $(0,0)$ 走到顶点 $(\frac{1}{2},k)$，把长方形分成两块：曲线之下的面积（第一个积分，蓝绿色）和曲线左边的面积（第二个积分，琥珀色）。



因此两个积分合起来正好是整个长方形，面积为 $\frac{1}{2}k=\dfrac{1}{2(\sqrt{\mathrm{e}}+1)}$。同一幅图还给出一个一般结论：对于满足 $\mathrm{f}(0)=0$ 的递增函数，

$$\int_0^a \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^{\mathrm{f}(a)} \mathrm{f}^{-1}(y)\,\mathrm{d}y=a\,\mathrm{f}(a).$$

验算

以数值计算，第一个积分约为 0.08655，第二个约为 0.10222；对两者分别使用辛普森法则（Simpson's rule），结果与精确式子吻合至小数点后十二位，而两者之和 0.18877 等于 $1/(2(\sqrt{\mathrm{e}}+1))$。再用草图作个合理性检查：两块面积都是正数，而且蓝绿色的一块较小，这是理所当然的，因为凸曲线下垂至长方形对角线之下。

常见错误

- 没有留意到 $k = \mathrm{f}(\frac{1}{2})$，因而错过了 $1 + (\mathrm{e} - 1)k = \sqrt{\mathrm{e}}$ 这个化简。
- 把 f 在原点附近画在 $y = x$ 之上：它在该处的斜率是 $1/(\mathrm{e} - 1) < 1$。
- 作图时，在另一幅图上把 $y = \mathrm{g}(x)$ 之下的面积涂上阴影，却没有说明它与 $y = \mathrm{f}(x)$ 旁边的区域有何关系；关键在于反射把其中一个区域变成另一个。

STEP 之外

恒等式 $\int_0^a \mathrm{f} + \int_0^{\mathrm{f}(a)} \mathrm{f}^{-1} = a\,\mathrm{f}(a)$ 是杨氏不等式（*Young's inequality*）中等号成立的情况：对任意 $b \geq 0$，$\int_0^a \mathrm{f} + \int_0^b \mathrm{f}^{-1} \geq ab$。取 $\mathrm{f}(x) = x^{p-1}$，便得到 $ab \leq a^p/p + b^q/q$，其中 $1/p + 1/q = 1$，这是分析学中赫尔德不等式（Hölder's inequality）的起点。想知道这类积分如何严格地建立起来，Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门书）是很好的读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。