详细解答

STEP I 2008，第 5 题

纯数学 · 多项式的界限

> **STEP I 2008，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q5

关键思路

当 $n = 1$ 时，多项式（polynomial）是一条直线，它在区间两个端点的值互相牵制：两者恰好相差 2，所以不可能同时都很小。第 (ii) 部分的窍门是先除以首项系数（leading coefficient），使切比雪夫（Chebyshev）定理可以直接应用于该曲线本身。定理于是迫使 $|y|$ 在 $[-1,1]$ 内某处必须很大，而端点处的值却很小。一条曲线若升得比两个端点值都高（或降得比两者都低），就必定在中间某处转向。

解答

第 (i) 部分

$n = 1$ 的情况。这时 $\mathrm{p}(x) = x + a_0$，我们需要证明 $M \geq 2^0 = 1$。由于 M 不小于 $|\mathrm{p}|$ 在 $[-1,1]$ 内任何一点的值，它自然不小于端点处的值：

$$M \geq |\mathrm{p}(1)| = |1 + a_0| \quad \text{及} \quad M \geq |\mathrm{p}(-1)| = |a_0 - 1|.$$

两式相加，并利用三角不等式（triangle inequality）$|u| + |v| \geq |u - v|$，

$$2M \geq |1 + a_0| + |a_0 - 1| \geq |(1 + a_0) - (a_0 - 1)| = 2,$$

所以 $M \geq 1 = 2^{1-n}$，这就证明了定理在 $n = 1$ 时成立。（当 $\mathrm{p}(x) = x$ 时等号成立，所以这个界不能再改进。）

(a) 对于 $\mathrm{p}(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ 及 $|x| \leq 1$，我们有 $0 \leq x^2 \leq 1$，所以 $-\frac{1}{2} \leq \mathrm{p}(x) \leq \frac{1}{2}$。在 $x = \pm 1$ 处取得 $\frac{1}{2}$ 这个值（而在 $x = 0$ 处取得 $-\frac{1}{2}$），所以

$$M = \tfrac{1}{2} = 2^{1-2}.$$

定理成立，而且等号成立。

(b) 对于 $\mathrm{p}(x) = x^3 - x$，我们需要 $M \geq 2^{1-3} = \frac{1}{4}$。只要找到一个点使得 $|\mathrm{p}| \geq \frac{1}{4}$ 就足够了。驻点（stationary point）出现在 $3x^2 - 1 = 0$ 之处，即 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$，两者都在 $[-1, 1]$ 内，而且

$$\mathrm{p}\left(-\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

由于 $\mathrm{p}(\pm 1) = 0$，这其实就是最大值：$M = \frac{2}{3\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \approx 0.385$。若要不用计算机而与 $\frac{1}{4}$ 比较，可把两边平方：

$$\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{4}{27} > \frac{4}{64} = \frac{1}{16} = \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

所以 $M > \frac{1}{4}$，定理成立（这次还绰绰有余）。

第 (ii) 部分

设 $f(x) = 64x^5 + 25x^4 - 66x^3 - 24x^2 + 3x + 1$。切比雪夫定理针对的是首项系数为 1 的多项式，所以我们把它应用于

$$\mathrm{p}(x) = \tfrac{1}{64} f(x) = x^5 + \tfrac{25}{64}x^4 - \tfrac{66}{64}x^3 - \tfrac{24}{64}x^2 + \tfrac{3}{64}x + \tfrac{1}{64},$$

它具有所需的形式，其中 $n = 5$。定理给出 $\max_{|x|\leq 1} |\mathrm{p}(x)| \geq 2^{-4} = \frac{1}{16}$，再乘以 64，

$$\max_{|x|\leq 1} |f(x)| \geq 4.$$

所以存在某个 $x_0 \in [-1, 1]$ 使得 $|f(x_0)| \geq 4$。

现在看看端点：

$$f(1) = 64 + 25 - 66 - 24 + 3 + 1 = 3,$$
$$f(-1) = -64 + 25 + 66 - 24 - 3 + 1 = 1.$$

两者的模（modulus）都小于 4，所以 x_0 不是端点：$-1 < x_0 < 1$。

> **想一想** 我们知道 $|f|$ 在区间内部会变得很大。为甚么这样就必定有转向点?

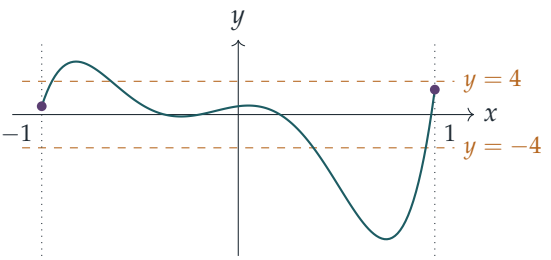
这里有两种情况。

- 若 $f(x_0) \geq 4$，则 $f(x_0)$ 比 $f(-1) = 1$ 和 $f(1) = 3$ 都大。连续函数（continuous function）f 在闭区间（closed interval）$[-1, 1]$ 上取得最大值；这个值至少是 $f(x_0) \geq 4$，所以它不是在任何一个端点取得的。因此它是在一个内点取得的，而该点就是 f 的局部极大点（local maximum）。

- 若 $f(x_0) \le -4$，则 $f(x_0)$ 低于两个端点值，同理 f 在 $[-1,1]$ 上的最小值是在一个内点取得的，而该点就是局部极小点（local minimum）。

无论哪种情况，f 都有一个局部极大点或极小点严格位于 $(-1,1)$ 之内。在该点 $f' = 0$，而由于 f 是非常数多项式，f' 只有有限个零点。所以 f' 在该点左边附近保持同一个符号，在右边附近也保持同一个符号。因为该点是局部极大点或极小点，这两个符号必定相反，所以它是一个真正的转向点（turning point）。因此曲线在 $-1 \le x \le 1$ 内至少有一个转向点，这正是所要证明的。

留意我们从头到尾都不必解四次方程 $f'(x) = 0$。这正是本题的用意。



草图显示曲线在 $[-1,1]$ 上的形状。两个端点值都位于虚线 $y = \pm 4$ 之间，但曲线却走出了这条带状区域。事实上它在区间内有四个转向点，最深的一个在 $x \approx 0.75$ 附近，该处 $y \approx -15$。

验算

- 当 $n = 1$ 时，试几个 a_0 的值便可看到 $\max(|1 + a_0|, |1 - a_0|)$ 永远不小于 1，而且只有在 $a_0 = 0$ 时才等于 1。
- 在 (b) 中，$\frac{2}{3\sqrt{3}} \approx 0.3849$，远高于 0.25。在细密的格点上对 $x^3 - x$ 取样，可确认这就是 $|x^3 - x|$ 的最大值。
- 在 (ii) 中，对 f 在 $[-1,1]$ 上作数值扫描，得到 $\max|f| \approx 15.0$（在 $x \approx 0.753$ 处，该处 $f \approx -15.0$），远高于定理所保证的 4。扫描亦发现 f' 在 $x \approx -0.825, -0.292, 0.052, 0.753$ 处变号。

常见错误

- 直接把定理应用于 f。它的首项系数是 64 而不是 1，所以必须先除以 64。所得的界变成 $64 \cdot 2^{-4} = 4$。
- 停在“某处 $|f| \ge 4$”这一步。单凭这一点并不能得出转向点：你还需要端点值 1 和 3，

才能说明极值是在区间内部取得的。

► 在 (b) 中，草率地比较 $\frac{2}{3\sqrt{3}}$ 与 $\frac{1}{4}$。把两个正数平方，便可作出准确的比较。

STEP 之外

切比雪夫定理中的等号恰好在 $2^{1-n}T_n(x)$ 时成立，其中 T_n 是由 $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ 定义的切比雪夫多项式（Chebyshev polynomial）。(a) 部分就是 $\frac{1}{2}T_2$，而 $n = 1$ 的情况就是 $T_1(x) = x$。这些多项式是逼近理论（approximation theory）的起点：它们解释了为甚么在切比雪夫节点（Chebyshev nodes）上插值（interpolation）的效果最好，胜过在等距点上插值。第 (ii) 部分的论证用到极值定理（extreme value theorem，即闭区间上的连续函数必取得其上下界），这个定理会在大学第一门分析课中严格证明。Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本分析学入门教科书）是阅读这个定理的好去处。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。