详细解答

STEP I 2008，第 4 题

纯数学 · 凸函数

STEP I 2008，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s1-q4

关键思路

两个函数都是指数函数（exponential），形如 $\mathrm{e}^{h(x)}$，求导两次便得 $(h''+(h')^2)\mathrm{e}^h$。指数因子恒为正，所以凸性（convexity）问题归结为 $h''+(h')^2$ 的正负，这是一个纯粹的三角不等式。在 (i) 中，这个不等式比较的恰好就是题目要求我们绘画的两条曲线。在 (ii) 中，它化简为 $\sin 2x$ 与 $\sin 2\alpha$ 的比较。

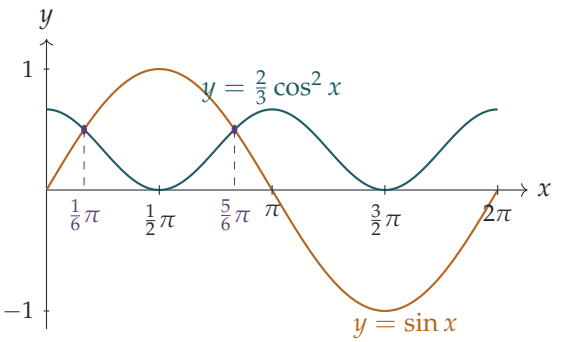
解答

第 (i) 部分

草图。曲线 $y=\frac{2}{3}\cos^2 x$ 介乎 0 与 $\frac{2}{3}$ 之间。它在 $x=0,\pi,2\pi$ 处取值 $\frac{2}{3}$，并在 $x=\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi$ 处与横轴相切，周期为 π。曲线 $y=\sin x$ 是常见的正弦波。要找出两者的交点，设 $s=\sin x$，并用 $\cos^2 x=1-s^2$：

$$\tfrac{2}{3}(1-s^2)=s \iff 2s^2+3s-2=0 \iff (2s-1)(s+2)=0.$$

由于 $s=-2$ 不可能成立，故 $\sin x=\frac{1}{2}$，所以两条曲线只在 $x=\frac{1}{6}\pi$ 和 $x=\frac{5}{6}\pi$ 相交。在 $(\pi,2\pi)$ 上，正弦曲线为负，而另一条曲线非负，所以该处没有交点。



f 的凸性。设 $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\sin x}$，由链式法则（chain rule）得 $f'(x) = \frac{2}{3}\cos x\, f(x)$，再用乘积法则（product rule），

$$\begin{aligned} f''(x) &= -\tfrac{2}{3}\sin x\, f(x) + \tfrac{2}{3}\cos x\, f'(x) \\ &= f(x)\left(\tfrac{4}{9}\cos^2 x - \tfrac{2}{3}\sin x\right) \\ &= \tfrac{2}{3}f(x)\left(\tfrac{2}{3}\cos^2 x - \sin x\right). \end{aligned}$$

想一想 为甚么括号内的式子就能决定一切?

由于 $f(x)$ 是指数函数，它严格为正，所以 $f''(x) \geq 0$ 当且仅当 $\frac{2}{3}\cos^2 x \geq \sin x$。换言之，$f$ 为凸函数之处，恰好就是青绿色曲线位于琥珀色曲线之上或与之重合的地方。这就是题目先要求绘画草图的原因。

由草图及上面求得的交点可知，当 $0 < x \leq \frac{1}{6}\pi$ 以及 $\frac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi$ 时，$\frac{2}{3}\cos^2 x \geq \sin x$。在 $\frac{1}{6}\pi$ 与 $\frac{5}{6}\pi$ 之间，正弦曲线在上方（例如在 $x = \frac{1}{2}\pi$ 处，两个值分别为 0 和 1）。所以 f 在

$$0 < x \leq \tfrac{1}{6}\pi \qquad \text{及} \qquad \tfrac{5}{6}\pi \leq x < 2\pi,$$

上是凸的，而且不能在更大的区间上是凸的。（端点 $\frac{1}{6}\pi$ 和 $\frac{5}{6}\pi$ 处 $f'' = 0$，是否把它们包括在内，视乎个人习惯。）

第 (ii) 部分

设 $g(x) = \mathrm{e}^{-k\tan x}$，则 $g'(x) = -k\sec^2 x\, g(x)$。利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^2 x = 2\sec^2 x \tan x$ 及乘积法则，

$$\begin{aligned} g''(x) &= -2k\sec^2 x \tan x\, g(x) - k\sec^2 x\, g'(x) \\ &= g(x)\left(k^2\sec^4 x - 2k\sec^2 x \tan x\right) \\ &= k\sec^2 x\, g(x)\left(k\sec^2 x - 2\tan x\right). \end{aligned}$$

这里 $k = \sin 2\alpha > 0$，因为 $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$；另外 $\sec^2 x > 0$，$g(x) > 0$。所以 $g''(x) \geq 0$ 当且仅当 $k \sec^2 x \geq 2\tan x$。两边乘以 $\cos^2 x > 0$，这就变成

$$k \geq 2\tan x \cos^2 x = 2\sin x \cos x = \sin 2x.$$

所以 g 为凸函数之处，恰好就是满足

$$\sin 2x \leq \sin 2\alpha.$$

的地方。

想一想 当 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 时，$\sin 2x \leq \sin 2\alpha$ 在哪里成立?

当 x 取遍 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 时，$2x$ 取遍 $(0, \pi)$。在这个区间上，sin 先递增至 $\frac{1}{2}\pi$，然后递减，并且关于 $\frac{1}{2}\pi$ 对称。$\sin 2\alpha$ 这个值（其中 $0 < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$）在 $2x = 2\alpha$ 和 $2x = \pi - 2\alpha$ 处取得。所以 $\sin 2x \leq \sin 2\alpha$ 当且仅当 $2x \leq 2\alpha$ 或 $2x \geq \pi - 2\alpha$。即是

$$0 < x \leq \alpha \qquad \text{或} \qquad \tfrac{1}{2}\pi - \alpha \leq x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

特别地，当 $0 < x < \alpha$ 时，我们有 $0 < 2x < 2\alpha < \frac{1}{2}\pi$，而 sin 在该处递增，所以 $\sin 2x < \sin 2\alpha = k$，且 $g''(x) > 0$。因此 g 在 $0 < x < \alpha$ 上是凸的，正如题目所求。

另一个区间是

$$\tfrac{1}{2}\pi - \alpha < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

它与第一个区间确实不同，因为由 $\alpha < \frac{1}{4}\pi$ 可得 $\frac{1}{2}\pi - \alpha > \frac{1}{4}\pi > \alpha$。在中间一段 $\alpha < x < \frac{1}{2}\pi - \alpha$ 上，g 不是凸的。

验算

- 在 $x = \frac{1}{6}\pi$ 处：$\frac{2}{3}\cos^2 x = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2} = \sin x$，所以该处 $f'' = 0$，这正是边界点应有的情况。
- 在 (ii) 中，问题在 $x \mapsto \frac{1}{2}\pi - x$ 之下是对称的，因为 $\sin 2x$ 保持不变。这解释了为甚么第二个区间是第一个区间的镜像。
- 数值上，取 $\alpha = 0.5$ ($k \approx 0.841$)，用有限差分（finite difference）计算 g 的二阶导数（second derivative），在 $x = 0.3$ 和 $x = 1.3$ 处为正，在 $x = 0.8$ 处为负。由于 $\frac{1}{2}\pi - \alpha \approx 1.071$，这与求得的区间吻合。用电脑测试大量随机的 α 和 x，结果与两部分的答案都一致。

常见错误

- 对 $\mathrm{e}^{h(x)}$ 求导两次时遗漏了 $(h')^2$ 一项。二阶导数并不只是 $h''\mathrm{e}^h$。

- 在 (i) 中漏掉了整个 $(\pi, 2\pi)$。在那里 $\sin x < 0 \leq \frac{2}{3}\cos^2 x$，所以 f 由 $\frac{5}{6}\pi$ 一直到 2π 都是凸的。
- 做到 $\sin 2x \leq \sin 2\alpha \Rightarrow x \leq \alpha$ 便停下来。由于 sin 在 $(0, \pi)$ 上并非单调（monotonic），这样会漏掉第二个区间。

STEP 之外

二阶导数判别法只是凸性的其中一面。真正的定义是几何的：每一条弦（chord）都位于图像之上或与图像重合。对可导函数而言，这等价于 f' 递增，并由此引出琴生不等式（Jensen's inequality），它是算术几何平均不等式（AM–GM）以及概率和最优化中许多结果的基础。Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis* 对凸函数有严谨的论述。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则提供更多 STEP 风格的练习。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。