详细解答

STEP I 2008，第 3 题

纯数学 · 以重排法证明不等式

> **STEP I 2008，第 3 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q3

关键思路

不等式（inequality）$(*)$ 其实只是两个非负因子之积的另一种写法。一旦证明了它，其后每一个不等式都只在于如何选取 a、b、c、d，使 $(*)$ 的两边变成我们想要的两边，同时确保条件 $c \geq a$ 和 $d \geq b$ 确实成立。由于要证明的不等式都是对称（symmetric）的，我们可以先把各变量按大小排好次序，而正是这个次序提供了上述条件。

解答

证明 $(*)$

把所有项移到同一边，然后因式分解（factorise）：

$$ab + cd - bc - ad = a(b-d) - c(b-d) = (c-a)(d-b).$$

若 $c \geq a$ 且 $d \geq b$，两个因子皆为非负，故其积亦为非负。因此 $ab + cd \geq bc + ad$，而等号成立当且仅当 $c = a$ 或 $d = b$。

第 (i) 部分

两个变量。设 $x \geq y$。在 $(*)$ 中取

$$a = y, \quad b = y, \quad c = x, \quad d = x.$$

条件 $c \geq a$ 和 $d \geq b$ 所说的都是 $x \geq y$，这正是已知条件。于是 $ab + cd = y^2 + x^2$ 而 $bc + ad = xy + xy$，所以由 $(*)$ 得

$$x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

三**个变量**。现在再假设 $x \geq z$ 且 $y \geq z$。取

$$a = z, \quad b = z, \quad c = x, \quad d = y.$$

这里 $c \geq a$ 即 $x \geq z$，$d \geq b$ 即 $y \geq z$，两者皆为已知。此时 $ab + cd = z^2 + xy$ 而 $bc + ad = zx + zy$，所以

$$z^2 + xy \geq xz + yz.$$

把这个不等式与 $x^2 + y^2 \geq 2xy$ 相加（由于 $x \geq y$，后者可以使用）：

$$x^2 + y^2 + z^2 + xy \geq 2xy + xz + yz,$$

再从两边减去 xy，得

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx.$$

到目前为止，这个结果只在 $x \geq y \geq z$ 的情况下得到证明。

想一想 一个只在 $x \geq y \geq z$ 时证明了的结果，怎样才能推出对所有 x、y、z 都成立的结果?

$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ 的两边都是对称的：把任意两个变量对调，每一边都保持不变。给定任意实数 x、y、z，把它们由大至小排列为 $X \geq Y \geq Z$。根据刚才所证，$X^2 + Y^2 + Z^2 \geq XY + YZ + ZX$。但这与关于 x、y、z 的不等式是同一个不等式，只是各项的次序不同而已。所以这个不等式对所有实数 x、y 和 z 都成立。

（等号成立需要我们相加的两个不等式同时取等号，这就迫使 $x = y = z$。）

第 (ii) 部分

这个式子是三对数之和，每一对都是一个数加上它的倒数（reciprocal）：

$$\left(\frac{s}{t} + \frac{t}{s}\right) + \left(\frac{t}{r} + \frac{r}{t}\right) + \left(\frac{r}{s} + \frac{s}{r}\right).$$

因此只需证明对任意正数 p、q 都有 $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} \geq 2$，这正是 $x^2 + y^2 \geq 2xy$ 的类比。

式子 $\frac{p}{q} + \frac{q}{p}$ 对 p 和 q 是对称的，所以我们可以适当命名，使得 $p \geq q > 0$。在 $(*)$ 中取

$$a = q, \quad b = \frac{1}{p}, \quad c = p, \quad d = \frac{1}{q}.$$

于是 $c \geq a$ 即 $p \geq q$，而 $d \geq b$ 即 $\frac{1}{q} \geq \frac{1}{p}$；由于 p 和 q 都是正数，后者同样可由 $p \geq q$ 推出。现在

$$ab + cd = \frac{q}{p} + \frac{p}{q}, \qquad bc + ad = \frac{p}{p} + \frac{q}{q} = 2,$$

所以由 $(*)$ 得 $\dfrac{p}{q} + \dfrac{q}{p} \geq 2$。

把这个结果应用于 (s,t)、(t,r) 和 (r,s) 三对数，再把三个结果相加，便得

$$\frac{s}{t}+\frac{t}{r}+\frac{r}{s}+\frac{t}{s}+\frac{r}{t}+\frac{s}{r}\geq 2+2+2=6$$

对所有正数 r、s 和 t 都成立，这正是所要证明的。等号成立当且仅当 $r=s=t$，因为每一对都需要其中两数相等。

验算

- 在第 (i) 部分试代入 $x=3$、$y=1$、$z=-2$：左边是 14，右边是 $3-2-6=-5$。把这三个值任意置换，两边都保持不变，正如对称性论证所需。
- 第 (i) 部分的另一个独立证明：$2(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\geq 0$。
- 取 $r=2$、$s=1$、$t=1$，第 (ii) 部分的式子等于 $1+\frac{1}{2}+2+1+2+\frac{1}{2}=7\geq 6$。用电脑对 20,000 个随机的精确有理数例子逐步检查，没有发现任何反例；而 $r=1.001$、$s=1$、$t=0.999$ 之类的数值所得的和仅仅略大于 6。

常见错误

- 使用 $(*)$ 时没有检查 $c\geq a$ 和 $d\geq b$。若代入方式不当，不等号的方向可能会相反。
- 在第 (ii) 部分，忘记了 $\frac{1}{q}\geq\frac{1}{p}$ 用到正数这个条件：对于负数，取倒数并不会以同样的方式把大小次序倒转。
- 只在 $x\geq y\geq z$ 的情况下证明第 (i) 部分，却没有解释为何凭对称性可得出一般情况。

STEP 之外

不等式 $(*)$ 是*排序不等式*（rearrangement inequality）在两项时的情况：若两列数都已按大小排好，则按相同次序配对时乘积之和最大，按相反次序配对时乘积之和最小。本题的两个结果，以及两项的算术—几何平均不等式（AM–GM），都可以由它直接推出；它亦与切比雪夫（Chebyshev）总和不等式密切相关。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 有更多 STEP 风格的不等式练习，而 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis* 则展示了这类关于大小次序的论证如何成为分析学（analysis）的基础。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。