详细解答

STEP I 2008，第 2 题

纯数学 · 代换积分法

STEP I 2008，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s1-q2

关键思路

这个代换（substitution）的用意，是令平方根变成简单的 $t-x$。我们不必先解出 x 再对一个繁复的商求导，而是先平方消去根号，再对所得的关系式作隐函数求导（implicit differentiation）。所得的导数（derivative）恰好含有因子 $t-x$，可与被积函数（integrand）中的平方根互相约去，于是积分简化成 $\int \frac{1}{t+b}\,\mathrm{d}t$。最后一部分则是考验这个约简和除法在甚么情况下才算合理。

解答

导数

设 $R=\sqrt{x^2+2bx+c}$，则 $t-x=R$。两边平方，

$$t^2-2tx+x^2=x^2+2bx+c \quad\Longrightarrow\quad t^2-2tx-2bx-c=0.$$

把上式对 t 求导（视 x 为 t 的函数），

$$2t-2x-2t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-2b\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=0, \qquad \text{所以} \qquad (t+b)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=t-x.$$

要除以 $t+b$，必须确定它不等于零。由于 $b^2<c$，

$$x^2+2bx+c=(x+b)^2+(c-b^2)>(x+b)^2,$$

所以 $R>|x+b|$，因此

$$t+b=(x+b)+R>(x+b)+|x+b|\geq 0.$$

故此对任何 x 都有 $t+b>0$，而且

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{t-x}{t+b},$$

这正是所求的结果。（平方后的关系式也可以直接解出：$x=\dfrac{t^2-c}{2(t+b)}$，对此式求导，经过一些代数运算后会得到相同的答案。）

积分

二次式 $x^2+2bx+c$ 对所有 x 都是正数，所以被积函数处处有定义。作代换，并利用 $R=t-x$，

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2bx+c}}\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{t-x}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{1}{t-x}\cdot\frac{t-x}{t+b}\,\mathrm{d}t\\&=\int\frac{1}{t+b}\,\mathrm{d}t=\ln(t+b)+C,\end{aligned}$$

其中因为 $t+b>0$，所以不需要加上绝对值（modulus）符号。约去 $t-x=R$ 是可以的，因为 $R>0$。换回 x，

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2bx+c}}\,\mathrm{d}x=\ln\left(x+b+\sqrt{x^2+2bx+c}\right)+C.$$

你可以用求导来验证：$x+b+R$ 的导数是 $1+\dfrac{x+b}{R}=\dfrac{R+x+b}{R}$，再除以 $x+b+R$ 便剩下 $\dfrac{1}{R}$。

$b^2=c$ 的情况

这时 $x^2+2bx+c=(x+b)^2$，所以 $\sqrt{x^2+2bx+c}=|x+b|$，被积函数是 $\dfrac{1}{|x+b|}$（在 $x\neq -b$ 时有定义）。

? **想一想** 为甚么 $\sqrt{(x+b)^2}$ 不能简单地写成 $x+b$?

平方根符号所指的是非负的那个根，所以 $\sqrt{(x+b)^2}=|x+b|$，当 $x+b<0$ 时它等于 $-(x+b)$。这个正负号正正决定了公式是否仍然成立。

若 $x+b>0$：直接计算，

$$\int\frac{1}{x+b}\,\mathrm{d}x=\ln(x+b)+C.$$

公式给出

$$\ln\left(x+b+(x+b)\right)=\ln 2+\ln(x+b),$$

它与直接计算的答案只相差常数 $\ln 2$。所以结果仍然成立。

若 $x+b<0$：直接计算，

$$\int \frac{1}{-(x+b)}\,\mathrm{d}x = -\ln\big(-(x+b)\big)+C = -\ln|x+b|+C.$$

但公式给出 $\ln\left(x+b+|x+b|\right)=\ln\left((x+b)-(x+b)\right)=\ln 0$，这是没有定义的。所以结果在这里不成立。

值得看看推导是在哪一步出错的。当 $x+b<0$ 时，对任何 x 都有 $t=x-(x+b)=-b$：t 是常数，根本不能用作新的变量，而 $t+b=0$ 正是我们用来作除数的那个量。严格不等式（strict inequality）$b^2<c$ 正是保证 $t+b>0$ 的条件。当 $b^2=c$ 时，只剩下非严格的不等式 $t+b\geq 0$，而等号恰好在 $x+b\leq 0$ 时成立。

验算

- 取 $b=0$、$c=1$，结果变成 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C=\operatorname{arsinh}x+C$，即标准结果。
- 数值上，随机选取 b 和 $c>b^2$，在随机选取的上下限之间以辛普森法则（Simpson's rule）计算积分，所得的值与对数公式之差吻合，误差小于 10^{-7}。至于 $b^2=c$ 而 $b=1.3$ 的情况，$\int_{0.5}^{4}\frac{\mathrm{d}x}{|x+b|}\approx 1.07992$，与公式给出的 $\ln\frac{5.3}{1.8}$ 相符。

常见错误

- 写成 $\ln|t+b|$ 而没有留意到 $t+b>0$，因而看不出 $b^2=c$ 时出了甚么问题。
- 在最后一部分把 $\sqrt{(x+b)^2}=x+b$ 当作成立，以致完全掩盖了 $x+b<0$ 时公式失效的情况。

STEP 之外

代换 $t=x+\sqrt{x^2+2bx+c}$ 是欧拉代换（*Euler's substitutions*）的其中一种，这类代换能把任何由 x 和 $\sqrt{ax^2+bx+c}$ 组成的有理函数（rational function）的积分，化为 t 的有理函数的积分。最后一部分说明了为甚么变量代换（change of variable）需要新变量平滑地、而且一对一（one-to-one）地依赖于旧变量：当 t 是常数时，这个方法便完全失效。Bartle 与 Sherbert 所著的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）对变量代换定理有严谨的表述，并精确地列明了这些假设。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。