详细解答

STEP I 2008，第 13 题

概率与统计 • 环形排列

STEP I 2008，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s1-q13

关键思路

在圆桌上，只有各人之间的相对位置才重要，所以我们固定其中一人的座位，再把其余五人排在他周围。这样共有 $5! = 120$ 种等可能的排列（arrangement），而每个概率（probability）都是在 120 种之中计数所得的比例。必须相邻而坐的一对夫妇，可以黏合成一个“组块”，组块内部有两种次序。至于“恰好”和“没有”的情况，我们可以直接计数，也可以对“第 k 对夫妇相邻而坐”这些事件（event）运用容斥原理（inclusion–exclusion）。

解答

把三对夫妇记为 A, a; B, b; C, c。所有人沿桌边同时移动一个位置，各人之间的相对座次并没有改变。因此我们固定 A 的座位，再按顺时针方向把其余五人依次安排在余下的座位上。这样共有 $5! = 120$ 种排列，全部等可能。

假如我们改为替座位编号，便会有 $6! = 720$ 种排列。这时每种相对排列都出现 6 次，分别对应 A 可以坐的每一个座位，所以概率不变。

一个有用的一般结果：把 n 件物件排成一个圆圈，共有 $(n-1)!$ 种排法（先固定一件物件，再排列其余的）。

第 (i) 部分

如果每对夫妇都相邻而坐，就把每对夫妇黏合成一个组块。这样圆桌旁共有 3 个组块，排法有 $(3-1)! = 2$ 种。在每个组块内，丈夫可以坐在妻子的任何一边，所以有 $2^3 = 8$ 种选择。因此

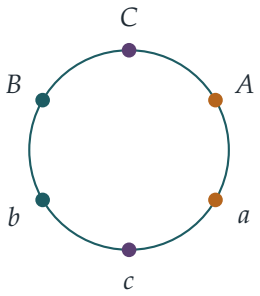
$$\mathrm{P}(\text{三对夫妇全部相邻}) = \frac{2 \times 8}{120} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15},$$

正如所求。

第 (ii) 部分

首先选出哪一对夫妇不相邻，共有 3 种选择。假设是 C, c，即 A, a 和 B, b 各自相邻，但 C 和 c 不相邻。

把 Aa 和 Bb 黏合成组块。现在圆桌旁有 4 个单位：Aa, Bb, C, c，排法有 $3! = 6$ 种。固定 C，再看 c 可以落在这个 4 单位圆圈的其余三个位置中的哪一个。其中两个位置上 c 与 C 相邻，另一个位置上 c 则在正对面。所以在这 6 种排列中，C 和 c 分开的恰好有 $6/3 = 2$ 种。在这些排列中，C 与 c 之间的两个空隙各由一个组块填满，如图所示：



想一想 为甚么这比看起来简单?

当 C 与 c 相对而坐时，余下的自由度只有哪个组块坐在哪一边（2 种），以及每个组块内部的次序（$2 \times 2 = 4$ 种）。这样共有 $2 \times 4 = 8$ 种排列。把分开的那对夫妇的三种选择全部计算在内，

$$\mathrm{P}(\text{恰好两对夫妇相邻}) = \frac{3 \times 8}{120} = \frac{24}{120} = \frac{1}{5}.$$

第 (iii) 部分

设 E_k 为第 k 对夫妇相邻而坐的事件，其中 $k = 1, 2, 3$。我们在 120 种排列之中计数每一类排列的数目。

- $|E_1|$：把第 1 对夫妇黏合成一个组块。圆桌旁便剩下 5 个单位，所以有 $4! = 24$ 种排列，每种有 2 种内部次序，合共 48 种。
- $|E_1 \cap E_2|$：两个组块加上两个人，共 4 个单位。排列有 $3! = 6$ 种，内部次序有 $2^2 = 4$ 种，合共 24 种。
- $|E_1 \cap E_2 \cap E_3| = 16$，由第 (i) 部分得出。

根据对称性（symmetry），无论选取哪几对夫妇，以上数目都相同。由容斥原理，至少有

一对夫妇相邻的排列数目是

$$|E_1 \cup E_2 \cup E_3| = 3(48) - 3(24) + 16 = 144 - 72 + 16 = 88.$$

所以有 $120 - 88 = 32$ 种排列没有任何夫妇相邻，而

$$\mathrm{P}(\text{没有丈夫与自己的妻子相邻}) = \frac{32}{120} = \frac{4}{15}.$$

想一想 第 (ii) 部分的答案可以从同一组数目直接读出吗?

可以。每个 $|E_i \cap E_j|$ 所计数的，是恰好只有 i, j 这两对相邻的排列，再加上三对全部相邻的排列。所以恰好两对夫妇相邻的排列数目是 $3(24) - 3(16) = 24$，与第 (ii) 部分吻合。

验算

- 四种情况必须涵盖全部 120 种排列。恰好一对夫妇相邻的排列数目是 $3(48) - 2 \cdot 3(24) + 3(16) = 48$，而 $32 + 48 + 24 + 16 = 120$。
- 用电脑穷举全部 720 种有编号的座次，得出 $0, 1, 2, 3$ 对夫妇相邻的概率分别为 $\frac{4}{15}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{2}{15}$。这些结果与上面的答案吻合。
- 合理性检查：某位妻子的两个邻座是从 5 个人中选出的，所以她丈夫坐在她旁边的概率是 $\frac{2}{5}$。这与 $|E_1|/120 = 48/120$ 一致。

常见错误

- 总数用了 $6!$ 种排列，却把符合条件的座次当作环形排列来计数，或者反过来。分子和分母必须采用同一种计数方式。
- 忘记每个组块内两人的次序所带来的因数 2。
- 在第 (ii) 部分，忘记剔除第三对夫妇也相邻的排列。若不剔除，$\frac{3\times 24}{120} = \frac{3}{5}$ 就大得太多了。

STEP 之外

这是*夫妇入座问题*（*ménage problem*）的缩影。经典版本还要求男女相间而坐，而它的一般答案（Touchard 公式）正是来自这一类容斥原理的运用。在我们这个不设限制的版本中，若有 n 对夫妇，相邻而坐的夫妇对数的期望值（expected value）是 $n \cdot \frac{2}{2n-1} \to 1$。没有任何夫妇相邻的概率趋向 e^{-1}，与著名的错排（derangement）极限一模一样。在男

女相间的 ménage 版本中，这个概率则趋向 e^{-2}。Grimmett 与 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（概率入门教材）对容斥原理和这类极限有很好的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。