详细解答

STEP I 2008，第 11 题

力学 · 极限摩擦力平衡

STEP I 2008，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s1-q11

关键思路

由于 $\angle P_1OP_2$ 是直角，半径 OP_2 平行于 P_1 处的切线（tangent），而半径 OP_1 则平行于 P_2 处的切线。因此，只要沿这两条半径的方向分解（resolve）各力，每条方程便只涉及一个法向反作用力（normal reaction）和一个摩擦力（friction）。再加上一条对 O 取力矩（moment）的方程（两个法向反作用力对该点都没有力矩），并在两端代入极限摩擦（limiting friction）的条件 $F = \mu R$，便得到三条方程，从中可以消去 α 以外的未知量。最后一部分其实是乔装了的倍角公式（double-angle formulae）。

解答

模型与各力

把杆视为均匀（uniform）的刚性杆，质心（centre of mass）G 位于杆的中点；把两个环视为轻环，并设金属线圈的半径为 a。由于环是轻的，线圈作用于每个环的力会原封不动地传到杆上，所以可以当作杆在 P_1 和 P_2 两点直接与线圈接触。杆的每一端都受到一个沿半径方向的法向反作用力和一个沿切线方向的摩擦力。

取 O 为原点，x 轴向右，y 轴向上，并设 P_1 在线圈最低点的左方。由于 $\angle P_1OP_2 = 90^\circ$，而 P_1 与向下的铅垂线成角 α，所以 OP_2 在另一侧与该铅垂线成角 $90^\circ - \alpha$：

$$P_1 = a(-\sin\alpha, -\cos\alpha), \qquad P_2 = a(\cos\alpha, -\sin\alpha).$$

因为 $0 < \alpha < 45^\circ$，$\cos\alpha > \sin\alpha$，所以 P_1 确实比 P_2 低，而且两点都在 O 的下方。

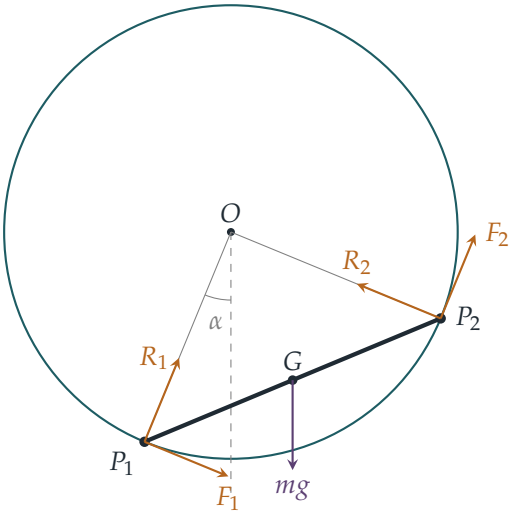
中点为 $G = \frac{a}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha, -\cos\alpha - \sin\alpha)$，位于通过 O 的铅垂线的*右方*。因此重量对 O 的力矩是顺时针方向的，杆即将沿线圈顺时针滑动（P_2 向下移，P_1 向上移）。摩擦力

阻碍这个运动，所以它在两端都沿逆时针方向作用：在 P_1 处沿线圈向下，在 P_2 处沿线圈向上。

设 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$ 分别为由 P_1 和 P_2 指向 O 的单位向量（unit vector）：

$$\mathbf{u}_1 = (\sin\alpha, \cos\alpha), \qquad \mathbf{u}_2 = (-\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2 = 0.$$

P_1 处的逆时针切线方向是 $-\mathbf{u}_2$，而 P_2 处的则是 $\mathbf{u}_1$。设法向反作用力（指向 O）为 R_1, R_2，摩擦力为 F_1, F_2。



平衡方程

重量 mg 铅垂向下作用，所以它沿 $\mathbf{u}_1$ 和 $\mathbf{u}_2$ 方向的分量分别是 $-mg\cos\alpha$ 和 $-mg\sin\alpha$。

沿 $\mathbf{u}_1$ 方向（即沿 P_1O）分解：R_1 和 F_2 有贡献，而 R_2 和 F_1 则与这个方向垂直。所以

$$R_1 + F_2 = mg\cos\alpha. \tag{1}$$

沿 $\mathbf{u}_2$ 方向（沿 P_2O）分解：R_2 的贡献是 $+R_2$，而 F_1 指向 $-\mathbf{u}_2$ 方向，贡献是 $-F_1$。所以

$$R_2 - F_1 = mg\sin\alpha. \tag{2}$$

对 O 取力矩：两个法向反作用力都通过 O。每个摩擦力都沿切线方向，与 O 的距离为 a，产生逆时针力矩 aF_1 和 aF_2。重量的作用线与 O 的水平距离为 $\frac{a}{2}(\cos\alpha - \sin\alpha)$，力矩为顺时针方向。因此

$$F_1 + F_2 = \tfrac{1}{2}mg(\cos\alpha - \sin\alpha). \tag{3}$$

极限摩擦与 $\tan\alpha$

杆的两端都处于即将滑动的状态，所以 $F_1 = \mu R_1$ 及 $F_2 = \mu R_2$。记 $c = \cos\alpha$，$s = \sin\alpha$，方程 (1) 和 (2) 变成

$$R_1 + \mu R_2 = mgc, \qquad -\mu R_1 + R_2 = mgs,$$

其解为

$$R_1 = \frac{mg(c - \mu s)}{1 + \mu^2}, \qquad R_2 = \frac{mg(s + \mu c)}{1 + \mu^2}.$$

当 μ 很小时（这里必然如此，见下文），两者皆为正数，所以反作用力确实如图所示指向 O。现在 (3) 表示 $\mu(R_1 + R_2) = \frac{1}{2}mg(c - s)$，即

$$\begin{aligned} 2\mu(c - \mu s + s + \mu c) &= (1 + \mu^2)(c - s) \\ c\,(2\mu + 2\mu^2 - 1 - \mu^2) + s\,(2\mu - 2\mu^2 + 1 + \mu^2) &= 0 \\ s\,(1 + 2\mu - \mu^2) &= c\,(1 - 2\mu - \mu^2). \end{aligned}$$

两边除以 $c\,(1 + 2\mu - \mu^2)$（它不等于零，因为 $c > 0$，而 $\tan\alpha > 0$ 迫使 μ 必须很小，这一点稍后便会看到），得

$$\tan\alpha = \frac{1 - 2\mu - \mu^2}{1 + 2\mu - \mu^2},$$

这正是所求的结果。

想一想 我们怎样知道摩擦力是沿逆时针方向而不是顺时针方向作用？

重量对 O 的力矩是顺时针方向的，因为 G 在 O 的右方，而法向反作用力对 O 没有力矩。所以必须单靠摩擦力提供逆时针方向的力矩；若没有摩擦力，杆便会顺时针滑动。假如你把摩擦力画成相反方向，整个运算过程会完全一样，只是 μ 换成了 $-\mu$，结果得出 $\tan\alpha > 1$，与 $\alpha < 45^\circ$ 矛盾。

杆的倾角

由 P_1 到 P_2 的向量是 $a(\cos\alpha + \sin\alpha,\ \cos\alpha - \sin\alpha)$，它的两个分量都是正数。所以杆与水平线所成的锐角 θ 满足

$$\tan\theta = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha} = \frac{1 - \tan\alpha}{1 + \tan\alpha} = \tan(45^\circ - \alpha),$$

而由于 $0 < 45^\circ - \alpha < 45^\circ$，我们得到 $\theta = 45^\circ - \alpha$。

现在把 $\mu = \tan\lambda$ 代入 $\tan\alpha$ 的公式，并把分子和分母同乘以 $\cos^2\lambda$：

$$\tan\alpha = \frac{(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda) - 2\sin\lambda\cos\lambda}{(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda) + 2\sin\lambda\cos\lambda} = \frac{\cos 2\lambda - \sin 2\lambda}{\cos 2\lambda + \sin 2\lambda} = \frac{1 - \tan 2\lambda}{1 + \tan 2\lambda} = \tan(45^\circ - 2\lambda).$$

由于 $0 < \lambda < 22.5^\circ$，角 $45^\circ - 2\lambda$ 严格介乎 0° 与 45° 之间，α 亦然。正切函数在这个区间上是一对一（one-to-one）的，所以 $\alpha = 45^\circ - 2\lambda$。因此

$$\theta = 45^\circ - \alpha = 2\lambda,$$

这正是我们要证明的。（这也解释了条件 $\lambda < 22.5^\circ$，即 $\mu < \sqrt{2} - 1$ 的由来：它恰好就是令 $\tan\alpha > 0$ 的条件。）

验算

- 当 $\mu = 0$（光滑线圈）时，我们得到 $\tan\alpha = 1$，所以 $\alpha = 45^\circ$，杆呈水平，这是杆在光滑圆上能够静止的唯一位置。
- 当 $\mu = 0.2$ 时：$\tan\alpha = 0.56/1.36$，所以 $\alpha \approx 22.38^\circ$，而 $\theta = 45^\circ - \alpha \approx 22.62^\circ$，与 $2\arctan 0.2 \approx 22.62^\circ$ 吻合。
- 数值验证：随机选取 10^4 组 $\mu \in (0, \sqrt{2}-1)$、a 和 m 的值，把上述 R_1, R_2, F_1, F_2 代入完整的向量方程，所得的合力和力矩皆为零（误差约为 10^{-14}），并且 $R_1, R_2 > 0$ 及 $\theta = 2\lambda$。

常见错误

- 沿水平和铅垂方向分解。这样做是可行的，但每条方程都会包含全部四个力；沿两条互相垂直的半径分解则简洁得多。
- 把其中一端摩擦力的方向弄错。两个环沿圆周滑动的方向相同，所以两端的摩擦力都是逆时针方向的。
- 忘记了 $\theta = 45^\circ - \alpha$ 需要略加说明：弦垂直于 $\angle P_1OP_2$ 的角平分线。

STEP 之外

这题还有一个更巧妙的几何看法：在极限摩擦的情况下，每一端的总反作用力与半径成角 λ，而一个在三个力作用下处于平衡（equilibrium）的物体，这三个力必须共点（concurrent），由此可直接推出 $\theta = 2\lambda$。这个“摩擦角”（angle of friction）的概念，以及摩擦力其实是不等式 $|F| \le \mu R$ 而不是等式这一事实，正是处理多个接触点的静力学问题的起点；在这类问题中，你必须问哪些接触点会先滑动。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）正是以这种严谨的态度处理摩擦力和刚体平衡。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。