详细解答

STEP I 2008，第 10 题

力学 • 抛体运动

> **STEP I 2008，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/08-s1-q10

关键思路

重力只沿铅垂方向作用，所以水平速度 $V\cos\alpha$ 始终不变，射程（range）就是 $V\cos\alpha$ 乘以总飞行时间（time of flight）。飞行时间完全由铅垂方向的运动决定，而这段运动可分成三个阶段：向上穿过底层、在高度 h 以上的一段往返，以及向下穿过底层返回地面。每个阶段都是匀加速（constant acceleration）问题，而大部分工夫都可以交给对称性（symmetry）代劳。

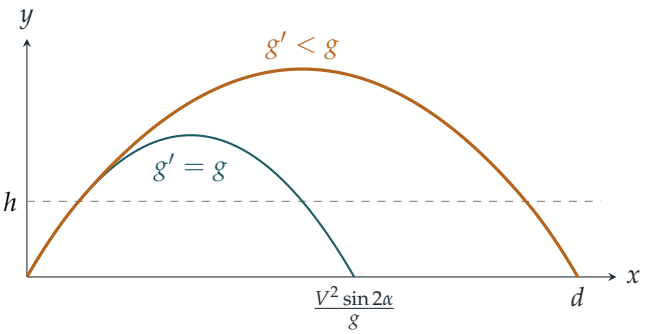
解答

我们把粒子（particle）看成一个质点，不计空气阻力，在平地上方的一个铅垂平面内运动。取 x 轴为水平方向，y 轴铅垂向上，原点设在抛射点。

草图

在高度 h 以下，两条轨迹（trajectory）服从完全相同的方程，所以在该处两者重合。条件 $V^2\sin^2\alpha > 2gh$ 表示初始的铅垂动能（kinetic energy）足以在加速度 g 之下升过高度 h，所以粒子确实会越过 $y = h$。

在 h 以上，$g' < g$ 的情况重力较弱，铅垂速率减少得较慢：粒子升得更高，在上面逗留得更久，描出一条较扁、较阔的抛物线（parabola）。速度在 $y = h$ 处连续（只有加速度出现跳跃），所以两段弧线平滑相接，没有尖角，但曲率（curvature）会突然改变。下降时，粒子重新进入底层，其速率和角度与离开时相同（由顶部弧线的对称性可知），而最后一段弧线正是第一段的镜像。因此 $g' < g$ 的路径落在更远的地方。



射程

初速度的铅垂分量（vertical component）为 $V\sin\alpha$，而当 $y<h$ 时加速度为 $-g$。

第 1 阶段：上升至高度 h。设 w 为粒子到达 $y=h$ 时的(向上)铅垂速率。由 $v^2=u^2+2as$，

$$w^2=V^2\sin^2\alpha-2gh=\sin^2\alpha\left(V^2-2gh\operatorname{cosec}^2\alpha\right)=V'^2\sin^2\alpha,$$

所以 $w=V'\sin\alpha$；这里取正根，因为 $\sin\alpha>0$，而且粒子仍在上升。（题目给出的条件正好保证 V' 是正实数。）由 $v=u+at$，所需时间为

$$t_1=\frac{V\sin\alpha-V'\sin\alpha}{g}=\frac{(V-V')\sin\alpha}{g}.$$

第 2 阶段：在高度 h 以上。此时粒子从 $y=h$ 出发，以速率 w 向上运动，加速度为 $-g'$。当 $wt-\frac{1}{2}g't^2=0$ 时，它回到 $y=h$，即经过时间

$$t_2=\frac{2w}{g'}=\frac{2V'\sin\alpha}{g'},$$

之后，而这时它正以铅垂速率 w 向下运动。

想一想 为甚么最后一个阶段所需的时间与第一个阶段相同?

在第 3 阶段，粒子从 $y=h$ 出发，以速率 w 向下运动，加速度为向下的 g，一直落到 $y=0$。这正是把第 1 阶段在时间上倒过来播放：匀加速运动是可逆的，而第 1 阶段是在同样的加速度下，由 $y=0$、速率 $V\sin\alpha$ 运动到 $y=h$、速率 w。所以粒子经过时间 $t_3=t_1$ 后到达地面，铅垂速率为 $V\sin\alpha$。（直接计算：铅垂速率以 g 的变率由 w 增至 $V\sin\alpha$，需时 $(V\sin\alpha-w)/g$。）

因此总飞行时间为

$$T=2t_1+t_2=2\sin\alpha\left(\frac{V-V'}{g}+\frac{V'}{g'}\right).$$

由于没有水平方向的力，水平速度自始至终保持为 $V\cos\alpha$，于是

$$\begin{aligned} d = V\cos\alpha \cdot T &= \left(\frac{V-V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right) 2V\sin\alpha\cos\alpha \\ &= \left(\frac{V-V'}{g} + \frac{V'}{g'}\right) V\sin 2\alpha, \end{aligned}$$

其中用到 $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$。这就是所要求的结果。

验算

- 若 $g' = g$，括号内的式子变成 V/g，于是 $d = V^2\sin 2\alpha/g$，即我们熟悉的地球上的射程。
- 若 $g' < g$，则 $V'/g' > V'/g$，所以 d 大于均匀重力下的射程，与草图吻合。
- 若恰好有 $V^2\sin^2\alpha = 2gh$，则 $V' = 0$：粒子刚好触及 $y = h$，完全感受不到 g'，于是同样得到 $d = V^2\sin 2\alpha/g$。
- 数值上，取 $V = 10$、$\alpha = 60°$、$g = 10$、$h = 2$ 及 $g' = 5$，可得 $V' = \sqrt{140/3} \approx 6.83$ 及 $d \approx 14.576$；以数值方法逐步模拟这个运动，所得的落点相同，相对误差在 10^{-5} 以内。（草图所用的正是这些数值。）

常见错误

- 忘记了向下穿过底层的那一段，得出 $t_1 + t_2$ 而不是 $2t_1 + t_2$。
- 把高度 h 处的铅垂速率当作 V' 而不是 $V'\sin\alpha$：V' 是按 $\operatorname{cosec}\alpha$ 放大了的速率，并不是铅垂分量本身。
- 在两段弧线相接处画出尖角：速度是连续的，所以接合处是平滑的。

STEP 之外

重力随位置而变，其实是常态而不是例外：真实的重力随着与行星中心的距离按 $1/r^2$ 减弱，抛体的路径也因而变成椭圆（ellipse）的弧，而不是抛物线。把一个运动分成若干个力的规律都很简单的区域，再在边界上令位置和速度互相衔接，是一种标准技巧；在粒子的折射（refraction），以及量子力学（quantum mechanics）中的阶跃势（step potential）问题里，都会再次用到。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）既讲解匀加速运动的各种工具，也讨论平方反比（inverse-square）重力下的轨道运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。