详细解答

STEP I 2008，第 1 题

纯数学 · 反证法

STEP I 2008，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/08-s1-q1

关键思路

有理数（rational number）在加法、减法、乘法以及除以非零数的运算下是封闭（closed）的。本题几乎所有结论都源自这一个事实：如果某些数是有理数，那么用这些运算由它们构造出来的任何数也是有理数。在最后部分，假设四个数之中有两个是有理数，把它们巧妙地组合起来，从而得出一个题目已告诉我们是无理数（irrational number）的数。

解答

定义

若实数 x 可以写成 $x = \frac{m}{n}$，其中 m 和 n 为整数且 $n \neq 0$，则称它为*有理数*。若一个实数不是有理数，即不存在整数 m 和 $n \neq 0$ 使得 $x = \frac{m}{n}$，则称它为*无理数*。

命题 A

用反证法（proof by contradiction）：假设 pq 是无理数，但 p 和 q 都不是无理数。那么两者都是有理数，所以可以写成 $p = \frac{a}{b}$ 和 $q = \frac{c}{d}$，其中 a, b, c, d 为整数且 $b, d \neq 0$。于是

$$pq = \frac{ac}{bd},$$

其中 ac 和 bd 都是整数，而且 $bd \neq 0$，因为 b 和 d 都不是零。所以 pq 是有理数，这与我们的假设矛盾。因此 p 和 q 之中至少有一个是无理数。

命题 B

同样地，假设 $p+q$ 是无理数，但 $p=\frac{a}{b}$ 和 $q=\frac{c}{d}$ 都是有理数，其中 $b,d\neq 0$。于是

$$p+q=\frac{ad+bc}{bd},$$

这是两个整数之比，而且分母不为零，所以 $p+q$ 是有理数。这个矛盾说明 p 和 q 之中至少有一个是无理数。

命题 C

取 $p=\sqrt{2}$ 和 $q=-\sqrt{2}$。两者都是无理数，但 $p+q=0=\frac{0}{1}$ 是有理数，所以 C 不成立。

为完整起见，以下说明为何 $\sqrt{2}$ 是无理数。若 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$ 为最简分数（lowest terms），则 $m^2=2n^2$，所以 m^2 是偶数，因而 m 也是偶数（奇数的平方是奇数）。设 $m=2k$，便得 $n^2=2k^2$，所以 n 也是偶数，这与最简分数的假设矛盾。至于 $-\sqrt{2}$ 也是无理数，因为若 $-\sqrt{2}=\frac{m}{n}$，则 $\sqrt{2}=\frac{-m}{n}$。

最后部分

题目告诉我们 π、π^2 和 $\mathrm{e}\pi$ 都是无理数（我们只需要这三个事实）。以下两个简单的观察会反复用到：

- 若 r 和 s 是有理数，则 $r+s$、$r-s$、rs 也是有理数，而 r/s 在 $s\neq 0$ 时亦然（论证与 A 和 B 所用的完全相同）；
- 因此，若 r 是有理数，则 $\frac{1}{2}r$ 也是有理数，因为 $\frac{1}{2}$ 是有理数。

另外留意 $\pi+\mathrm{e}>0$ 和 $\pi-\mathrm{e}>0$，因为 $\pi>3>\mathrm{e}>0$；特别地，两者都不是零。

用反证法：假设以下四个数

$$\pi+\mathrm{e},\quad \pi-\mathrm{e},\quad \pi^2-\mathrm{e}^2,\quad \pi^2+\mathrm{e}^2$$

之中有两个是有理数。共有六种可能的配对，我们逐一排除。

1. *$\pi+\mathrm{e}$ 和 $\pi-\mathrm{e}$ 为有理数。*两者相加，2π 是有理数，所以 π 是有理数。矛盾。
2. *$\pi^2-\mathrm{e}^2$ 和 $\pi^2+\mathrm{e}^2$ 为有理数。*两者相加，$2\pi^2$ 是有理数，所以 π^2 是有理数。矛盾。
3. *$\pi+\mathrm{e}$ 和 $\pi^2+\mathrm{e}^2$ 为有理数。*把前者平方，$(\pi+\mathrm{e})^2$ 是有理数，而

$$2\mathrm{e}\pi=(\pi+\mathrm{e})^2-(\pi^2+\mathrm{e}^2),$$

所以 $\mathrm{e}\pi$ 是有理数。矛盾。

4. $\pi - \mathrm{e}$ 和 $\pi^2 + \mathrm{e}^2$ 为有理数。同理，

$$2\mathrm{e}\pi = (\pi^2 + \mathrm{e}^2) - (\pi - \mathrm{e})^2$$

是有理数，所以 $\mathrm{e}\pi$ 是有理数。矛盾。

5. $\pi + \mathrm{e}$ 和 $\pi^2 - \mathrm{e}^2$ 为有理数。由于 $\pi + \mathrm{e} \neq 0$，

$$\pi - \mathrm{e} = \frac{\pi^2 - \mathrm{e}^2}{\pi + \mathrm{e}}$$

是两个有理数之商，而且分母不为零，所以它是有理数。这样 $\pi + \mathrm{e}$ 和 $\pi - \mathrm{e}$ 都是有理数，而根据情况 1，这是不可能的。

6. $\pi - \mathrm{e}$ 和 $\pi^2 - \mathrm{e}^2$ 为有理数。由于 $\pi - \mathrm{e} \neq 0$，

$$\pi + \mathrm{e} = \frac{\pi^2 - \mathrm{e}^2}{\pi - \mathrm{e}}$$

是有理数，于是再次由情况 1 得出矛盾。

? **想一想** 为甚么在情况 6 中需要 $\pi - \mathrm{e} \neq 0$?

因为不可以除以零：“有理数除以有理数仍是有理数”这一步，只在分母不为零时才成立。假如 $\pi = \mathrm{e}$，则 $\pi^2 - \mathrm{e}^2 = 0$ 是有理数，却不能告诉我们任何关于 $\pi + \mathrm{e}$ 的信息。这里 $\pi - \mathrm{e} \approx 0.42$，所以没有问题。

每一种配对都导致矛盾，所以四个数之中不可能有两个同时是有理数。因此其中至多有一个是有理数，这正是所要证明的。

验算

所用的恒等式很容易用数值验证：取 $\pi \approx 3.14159$ 和 $\mathrm{e} \approx 2.71828$，可得 $(\pi + \mathrm{e})(\pi - \mathrm{e}) \approx 5.85987 \times 0.42331 \approx 2.48055 \approx \pi^2 - \mathrm{e}^2$，以及 $(\pi + \mathrm{e})^2 - (\pi^2 + \mathrm{e}^2) \approx 17.0795 \approx 2\mathrm{e}\pi$。也数一数配对的数目：四个数共有 $\binom{4}{2} = 6$ 种配对，而六种都已处理。留意我们从未用过 e 和 e^2 是无理数这一点；根据对称性，在情况 1 和 2 中本来也可以用它们来代替 π 和 π^2。

常见错误

- 误证了 A 或 B 的逆命题（converse）。A 说的是“乘积为无理数 $\Rightarrow$ 其中一个因数为无理数”；它的逆命题并不成立（$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$）。
- 除以 $\pi \pm \mathrm{e}$ 时没有指出它不为零。
- 把命题 C 当作成立来使用，例如声称“π 和 e 是无理数，所以 $\pi + \mathrm{e}$ 是无理数”。事实上，$\pi + \mathrm{e}$ 是否无理数，至今仍是一个未解决的问题（open problem）。

STEP 之外

这里用到的封闭性质，说明有理数构成一个域（field）：在这样的集合里，你可以进行加、减、乘、除（除以零除外）而不会离开这个集合。域是大学一年级代数课程的核心对象，而“$\pi + \mathrm{e}$ 是否无理数?”这类问题则通向超越数论（transcendence theory），这个领域中已知的结果少得惊人。代数方面，可以读 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（环、域与群）；至于有理数与无理数的数论，可以读 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算术）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。