详细解答

STEP III 2007，第 9 题

力学 · 简谐运动

STEP III 2007，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s3-q9

关键思路

弹簧对两颗小珠的拉力或推力大小相等、方向相反，而且沿同一直线作用；圆环的反作用力（reaction）则沿径向，所以对圆心的总角动量（angular momentum）一直保持为零：两颗小珠的运动互为镜像。这样整个问题就简化为只有一个坐标，再由能量守恒（conservation of energy）便得出关于 θ 的简谐运动（simple harmonic motion，简称 SHM）。要留神的是，θ 是锐角的半角：如果两颗小珠分开得够远，越过了直径的两端，能量的公式就会改变形式，这时的运动必须由两段 SHM 拼合而成。

解答

建立模型

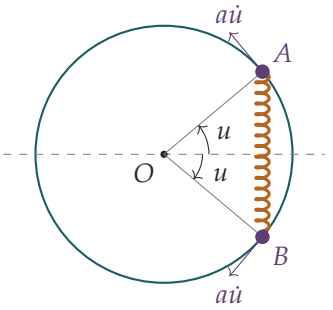
把小珠看成质点（particle），圆环固定而光滑（smooth），弹簧为轻（light）弹簧。作用于小珠的力有：重力和圆环反作用力的垂直分量（两者互相抵消）、反作用力的水平分量（由于圆环光滑，它沿半径方向），以及弹簧的力。弹簧作用于 A 的力和弹簧作用于 B 的力大小相等、方向相反，并且沿同一直线 AB 作用，所以它们对通过 O 的垂直轴的总力矩（moment）为零；径向的力对该轴则完全没有力矩。因此，对该轴的总角动量守恒，而由于小珠从静止开始，总角动量为零。

从一条固定的半径起沿圆环量度角度，设 A 和 B 所在的角度分别为 ϕ_A 和 ϕ_B。角动量为零即 $ma^2(\dot{\phi}_A + \dot{\phi}_B) = 0$，所以 $\phi_A + \phi_B$ 是常数。选取参考半径，使它平分初始的角 AOB；那么在任何时刻都有

$$\phi_A = u, \qquad \phi_B = -u,$$

其中只有一个坐标 u，而开始时 $u = \beta$。每颗小珠的速率都是 $a\dot{u}$，所以动能（kinetic

energy）是 $2\cdot\frac{1}{2}ma^2\dot{u}^2 = ma^2\dot{u}^2$。



当 $0 < u \le \frac{\pi}{2}$ 时，角 AOB 等于 $2u$；但如果 u 超过 $\frac{\pi}{2}$，小珠便已越过直径的两端，这时角 AOB 等于 $2\pi - 2u$。所以

$$\theta = u \quad (0 < u \le \tfrac{\pi}{2}), \qquad \theta = \pi - u \quad (\tfrac{\pi}{2} \le u < \pi).$$

小珠在 $u = \beta$ 处由静止释放，由能量守恒得

$$ma^2\dot{u}^2 + mk^2a^2(\theta-\alpha)^2 = mk^2a^2(\beta-\alpha)^2, \qquad \text{所以} \qquad \dot{u}^2 = k^2[(\alpha-\beta)^2 - (\theta-\alpha)^2].$$

“处于压缩状态”（in compression）是指弹簧比它的自然长度（natural length）短。能量在 $\theta = \alpha$ 时最小，所以那就是自然长度的位置；而长度 $2a\sin\theta$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上随 θ 增加而增加，因此 $0 < \beta < \alpha$。

$u \le \frac{\pi}{2}$ 时的运动

这时 $\theta = u$，把能量方程对 t 求导，再除以 $2\dot{u}$（只要小珠在运动，这一步就成立，其余时刻则由连续性补足），得

$$\ddot{\theta} = -k^2(\theta - \alpha).$$

这是以 $\theta = \alpha$ 为中心、角频率（angular frequency）为 k 的 SHM。由于小珠在 $\theta = \beta$ 处从静止出发，

$$\theta - \alpha = -(\alpha - \beta)\cos kt,$$

所以两颗小珠互相远离，如果中途没有任何事情打断，便会在 $t = \frac{\pi}{k}$ 时到达 $\theta = 2\alpha - \beta$。一切都取决于 $2\alpha - \beta$ 是否小于 $\frac{\pi}{2}$，也就是取决于 β 与 $2\alpha - \frac{\pi}{2}$ 的大小关系。这个临界值落在 $(0, \alpha)$ 之内，正是因为 $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$，所以以下三种情况都有可能出现。

情况 1： $2\alpha - \frac{\pi}{2} < \beta < \alpha$

这时 $2\alpha - \beta < \frac{\pi}{2}$，所以小珠永远不会到达直径的两端，全程都有 $\theta = u$，运动是在 $\theta = \beta$ 与 $\theta = 2\alpha - \beta$ 之间的纯粹 SHM。周期（period）为

$$T = \frac{2\pi}{k}.$$

情况 2： $0 < \beta < 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

这时 θ 在 SHM 掉头之前就到达 $\frac{\pi}{2}$，所需时间 t_1 满足

$$\frac{\pi}{2} - \alpha = -(\alpha - \beta)\cos kt_1, \qquad \text{所以} \qquad \cos kt_1 = -\lambda, \quad \text{其中}\lambda = \frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\alpha - \beta}.$$

由于 $\alpha < \frac{\pi}{2}$ 且 $\beta < 2\alpha - \frac{\pi}{2}$，我们有 $0 < \lambda < 1$。因此

$$kt_1 = \pi - \arccos\lambda = \frac{\pi}{2} + \arcsin\lambda.$$

在这一刻，能量方程给出 $\dot{u}^2 = k^2[(\alpha - \beta)^2 - (\frac{\pi}{2} - \alpha)^2] > 0$，所以两颗小珠仍在互相远离，并会继续越过直径的两端。

> **想一想** 小珠越过直径的两端之后，会发生甚么事?

当 $u \geq \frac{\pi}{2}$ 时，我们有 $\theta = \pi - u$，所以能量方程变成

$$\dot{u}^2 = k^2[(\alpha - \beta)^2 - (u - (\pi - \alpha))^2],$$

这是 u 以 $u = \pi - \alpha$ 为中心的 SHM，角频率同样是 k。它是到达直径之前那段运动关于 $u = \frac{\pi}{2}$ 的镜像。所以小珠再用一段时间 t_1，便在 $u = \pi - \beta$ 处静止（那里再次有 $\theta = \beta$，只是小珠现在位于 O 的另一侧），然后沿原路走完全程回到 $u = \beta$。经过四个这样的阶段后，小珠回到起始位置，所以运动的周期是

$$T = 4t_1 = \frac{4}{k}\left(\frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{\alpha - \beta}\right) = \frac{2}{k}\left(\pi + 2\arcsin\frac{\pi - 2\alpha}{2(\alpha - \beta)}\right).$$

（至于角 θ 本身，它并不记录小珠在 O 的哪一侧，所以每隔 $2t_1$ 就重复一次。）

情况 3： $\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

这时 θ 在 $t = \frac{\pi}{k}$ 到达 $2\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$，而 SHM 恰好在这一刻令小珠静止。这时两颗小珠位于直径的两端，所以弹簧沿 AOB 放置，它作用于每颗小珠的力都沿半径方向：这个力没有沿圆环方向的分量，而沿圆环方向也没有其他力作用。小珠处于平衡（equilibrium）而且静止，所以会一直留在那里。因此

$$\beta = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$$

就是不会出现振动的那个值。这与两个周期的结果吻合：当 β 从下方趋近这个值时，$\lambda \to 1$，情况 2 的周期趋向 $\frac{4\pi}{k}$，即情况 1 周期的两倍，因为小珠在直径附近逗留的时间愈来愈长。

验算

- 取 $k = 1$，$\alpha = \frac{3\pi}{8}$，$\beta = \frac{\pi}{8}$，由于 $2\alpha - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$，这属于情况 2。于是 $\lambda = \frac{\pi/8}{\pi/4} = \frac{1}{2}$，$\arcsin\lambda = \frac{\pi}{6}$，而 $T = 2(\pi + \frac{\pi}{3}) = \frac{8\pi}{3} \approx 8.378$。

- 我们用数值方法逐步求解两颗小珠的运动方程（能量写成两颗小珠位置的函数，并不假设任何对称性）。取 $k = 1$，$\alpha = 1.2$，$\beta = 0.5$ 时，小珠在 8.5162 之后回到起点并静止，而公式给出的是 8.51622；取 $\beta = 1.0$（情况 1）时，周期是 $6.2832 \approx 2\pi$。
- 量纲：k 的单位是 s^{-1}（能量等于 ma^2k^2 乘以角度的平方），所以 $\frac{2\pi}{k}$ 是时间。

常见错误

- 把动能写成 $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$：两颗小珠都在运动，所以动能是 $ma^2\dot{\theta}^2$。漏掉因子 2 会得出错误的角频率 $\sqrt{2}\,k$。
- 毫无根据地假设小珠对称地运动：这个结论来自对 O 的角动量守恒，而这需要弹簧作用于每颗小珠的力都沿同一直线 AB。
- 忘记 θ 是锐角，于是在所有情况下都答 $\frac{2\pi}{k}$。

STEP 之外

利用守恒量把两个质点的系统简化为一个坐标，正是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）的起点；在那里，对称性（在这题中，是把整个位形绕 O 旋转）会带来守恒定律，而诺特定理（Noether's theorem）把这个想法说得精确。情况 2 的运动是在“双井”（double-well）位势中的振动，它的周期取决于振幅，并且在能量等于中央势垒高度之处出现跳跃。想进一步了解守恒定律和振动，可参阅 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。