详细解答

STEP III 2007，第 8 题

纯数学 · 里卡蒂方程

> **STEP III 2007，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q8

关键思路

非线性方程 $(*)$ 是一条里卡蒂方程（Riccati equation）：y^2 项破坏了线性。把 y 写成 u'/u 的倍数，$y' + y^2$ 便会变成 u''/u，平方项随之消失，剩下一条关于 u 的线性二阶方程。第 (i) 部分的前半已经给了我们这条线性方程的两个解，所以余下的工作只是定出常数。至于第 (ii) 部分，我们需要一条新线性方程的两个解，而线索在于：把 $1 + x$ 中的 x 换成 $-x$，就得到 $1 - x$。

解答

第 (i) 部分

求 a 和 b。当 $u = x$ 时，$u' = 1$，$u'' = 0$，所以需要

$$\mathrm{a}(x) + x\,\mathrm{b}(x) = 0.$$

当 $u = \mathrm{e}^{-x}$ 时，$u' = -\mathrm{e}^{-x}$，$u'' = \mathrm{e}^{-x}$；除以 $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$ 得

$$1 - \mathrm{a}(x) + \mathrm{b}(x) = 0.$$

由第一条方程得 $\mathrm{b} = -\mathrm{a}/x$（其中 $x \neq 0$），再由第二条方程得 $\mathrm{a}(1 + \frac{1}{x}) = 1$。所以

$$\mathrm{a}(x) = \frac{x}{1+x}, \qquad \mathrm{b}(x) = -\frac{1}{1+x}.$$

（这两个函数在 $x = 0$ 时亦满足上述两个条件。）这条方程是线性而且齐次（homogeneous）的，而 x 与 e^{-x} 并非彼此的倍数，所以通解（general solution）是

$$u = Ax + B\mathrm{e}^{-x},$$

其中 A 和 B 为任意常数。

代换。设 $y = \dfrac{u'}{3u}$，其中 $u \neq 0$。由商法则（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{u''}{3u} - \frac{(u')^2}{3u^2} = \frac{u''}{3u} - 3\left(\frac{u'}{3u}\right)^2 = \frac{u''}{3u} - 3y^2.$$

所以 $y' + 3y^2 = \dfrac{u''}{3u}$：平方项刚好完全抵销，这正是代换中要放入因子 3 的原因。方程 $(*)$ 变成

$$\frac{u''}{3u} + \frac{x}{1+x}\cdot\frac{u'}{3u} = \frac{1}{3(1+x)},$$

乘以 $3u$ 得

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2} + \frac{x}{1+x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - \frac{1}{1+x}u = 0,$$

正如所求。这就是本部分开首的方程，其中的 a 和 b 正是我们刚才求得的。

特解（particular solution）。因此 $u = Ax + B\mathrm{e}^{-x}$，而

$$y = \frac{u'}{3u} = \frac{A - B\mathrm{e}^{-x}}{3(Ax + B\mathrm{e}^{-x})}.$$

> ? **想一想** 常数有两个，条件却只有一个。这会有问题吗？

不会。把 u 乘以一个非零常数并不会改变 u'/u，所以只有比 $A : B$ 才有影响，而一阶方程本来就应该只有一个自由常数。由条件“当 $x = 0$ 时 $y = 0$”得 $A - B = 0$。于是 $B = A \neq 0$（否则 $u \equiv 0$），约去 A 后，

$$y = \frac{1 - \mathrm{e}^{-x}}{3(x + \mathrm{e}^{-x})}.$$

分母永不为零，因为由 $\mathrm{e}^{-x} \geq 1 - x$ 可得 $x + \mathrm{e}^{-x} \geq 1$。第 (i) 部分至此完成。

第 (ii) 部分

现在 y^2 项的系数是 1，所以我们用 $y = \dfrac{u'}{u}$。与之前完全一样，

$$y' = \frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u}\right)^2 = \frac{u''}{u} - y^2,$$

所以 $y' + y^2 = u''/u$。把方程乘以 u，便得到线性方程

$$u'' + \frac{x}{1-x}u' - \frac{1}{1-x}u = 0.$$

这就是把第 (i) 部分的方程中的 x 换成 $-x$ 所得的方程。事实上，若 $v(x) = w(-x)$，其中 w 是第 (i) 部分方程的解，则 $v'(x) = -w'(-x)$ 及 $v''(x) = w''(-x)$，而第 (i) 部分的方程在点 $-x$ 处就是

$$v''(x) + \frac{-x}{1-x}(-v'(x)) - \frac{1}{1-x}v(x) = 0,$$

这正是新的方程。所以由 x 和 e^{-x} 可得出解 $-x$（或干脆取 x）和 e^{x}。直接验证：当 $u=x$ 时，$0+\frac{x}{1-x}-\frac{x}{1-x}=0$；当 $u=\mathrm{e}^{x}$ 时，$\mathrm{e}^{x}(1+\frac{x}{1-x}-\frac{1}{1-x})=\mathrm{e}^{x}(1-1)=0$。因此

$$u=Ax+B\mathrm{e}^{x},\qquad y=\frac{u'}{u}=\frac{A+B\mathrm{e}^{x}}{Ax+B\mathrm{e}^{x}}.$$

当 $x=0$ 时，上式等于 $(A+B)/B$，而它必须等于 2，所以 $A=B$（且 $B\neq 0$）。因此

$$y=\frac{1+\mathrm{e}^{x}}{x+\mathrm{e}^{x}}.$$

这个解在包含 0、满足 $x+\mathrm{e}^{x}>0$ 而且方程有定义的区间上成立，即 $x_0<x<1$，其中 $x_0\approx -0.567$ 是 $x+\mathrm{e}^{x}=0$ 的根。

验算

- 当 $x=0$ 时，第 (ii) 部分的答案给出 $2/1=2$；对它求导得 $y'(0)=\frac{1\cdot 1-2\cdot 2}{1}=-3$，与方程吻合：$1-4-0=-3$。
- 当 $x\to\infty$ 时，第 (i) 部分的答案趋向 0，其表现有如 $\frac{1}{3x}$。这时 $y'\approx -\frac{1}{3x^2}$ 与 $3y^2\approx\frac{1}{3x^2}$ 互相抵销，而 $\frac{x}{1+x}y\approx\frac{1}{3(1+x)}$，与 $(*)$ 一致。
- 我们以数值方法解了第 (ii) 部分的方程（由 $y(0)=2$ 出发，使用龙格－库塔法（Runge–Kutta）），得到 $y(0.9)=1.0297654\ldots$，与公式的结果在小数点后 10 位之内相符。

常见错误

- 在第 (ii) 部分仍然保留因子 $\frac{1}{3}$：乘数必须与 y^2 的系数配合，所以这里应该用 $y=u'/u$。
- 试图只凭一个条件同时定出 A 和 B。其实只有两者之比才会影响 y。
- 在第 (ii) 部分未经验证便再次取 e^{-x}：$1-x$ 中的正负号改变，令它变成 e^{x}。

STEP 之外

形如 $y'+P(x)y^2+Q(x)y=R(x)$ 的方程称为里卡蒂方程，而代换 $y=u'/(Pu)$ 总能把它化为一条线性二阶方程。反过来说，任何二阶线性方程的比 u'/u 都满足一条里卡蒂方程，这就是为甚么这类非线性方程在物理学中不断出现，由量子力学（quantum mechanics）以至控制理论（control theory）都有它们的踪影。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（常微分方程入门教材）涵盖了这个课题，以及线性二阶方程的理论（为甚么两个独立的解就能给出通解）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。