详细解答

STEP III 2007，第 7 题

纯数学 · 代换积分法

STEP III 2007，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s3-q7

关键思路

题目不容许我们提及“arctan”或“π”，所以每一项事实都必须靠积分内的变量代换（substitution）得出。每个代换都经过挑选，令被积函数（integrand）$1/(1+u^2)$（或 $1/\sqrt{1-u^2}$）变回自己，或变成另一个，只有积分上下限（limits）改变。比较上下限，便得到 t 与 s 各个值之间的等式；而第 (i) 部分的对称性（symmetry）$u \mapsto 1/u$，正是把这些等式化为 p 的倍数的关键。

解答

第 (i) 部分

取 $x > 0$，并设 $u = v^{-1}$，于是 $\mathrm{d}u = -v^{-2}\,\mathrm{d}v$。当 u 由 0 增至 x 时，v 由 ∞ 减至 $1/x$。另外

$$\frac{1}{1+u^2} = \frac{1}{1+v^{-2}} = \frac{v^2}{v^2+1}.$$

因此

$$t(x) = \int_{\infty}^{1/x} \frac{v^2}{1+v^2}\left(-\frac{1}{v^2}\right)\mathrm{d}v = \int_{1/x}^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v,$$

其中负号用来对调上下限。这就是所求的结果。（这个广义积分（improper integral）收敛（converges），因为被积函数不超过 $1/v^2$。）

以 $1/x$ 代替 x 套用上式，得 $t(1/x) = \int_x^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$。加上 $t(x) = \int_0^x \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v$，两个积分范围便合并成 $[0,\infty)$：

$$t(x) + t(1/x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+v^2}\,\mathrm{d}v = \tfrac{1}{2}p \qquad (x > 0).$$

代入 $x=1$，得 $2t(1)=\frac{1}{2}p$。

第 (ii) 部分

当 $u\geq 0$ 时，有 $0\leq y<1$。两边平方，$y^2(1+u^2)=u^2$，所以 $u^2(1-y^2)=y^2$，而

$$u=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}},$$

这里取正根，因为 u 与 y 同号。由商法则（quotient rule），

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{\sqrt{1-y^2}+\dfrac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}}{1-y^2}=\frac{(1-y^2)+y^2}{(1-y^2)^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{(1-y^2)^3}},$$

正如所求。

现在代入 $t(x)$。由 $u^2=y^2/(1-y^2)$ 得

$$1+u^2=\frac{1}{1-y^2},$$

所以

$$\frac{1}{1+u^2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=(1-y^2)\cdot\frac{1}{(1-y^2)^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

映射 $u\mapsto y$ 是递增（increasing）的（它的反函数的导数为正），而且 $u=0\mapsto y=0$，$u=x\mapsto y=x/\sqrt{1+x^2}$，后者小于 1。所以

$$t(x)=\int_0^{x/\sqrt{1+x^2}}\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\,\mathrm{d}y=s\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right).$$

取 $x=1$，并利用第 (i) 部分，上式即 $s(\frac{1}{\sqrt{2}})=t(1)=\frac{1}{4}p$。

第 (iii) 部分

记 $a=\frac{1}{\sqrt{3}}$，于是 $z=\dfrac{u+a}{1-au}$。在 $0\leq u\leq a$ 上有 $au\leq\frac{1}{3}$，所以分母保持为正，z 在该范围内是 u 的光滑函数（smooth function）。求导得

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=\frac{(1-au)+a(u+a)}{(1-au)^2}=\frac{1+a^2}{(1-au)^2}.$$

? **想一想** 为甚么这个代换会令 $1/(1+u^2)$ 保持不变?

通分计算 $1+z^2$。交叉项 $\mp 2au$ 互相抵消：

$$1+z^2=\frac{(1-au)^2+(u+a)^2}{(1-au)^2}=\frac{1+a^2u^2+u^2+a^2}{(1-au)^2}=\frac{(1+a^2)(1+u^2)}{(1-au)^2}.$$

两式相除，

$$\frac{1}{1+z^2}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=\frac{1}{1+u^2},$$

所以被积函数不变，只有上下限移动。（这背后其实是正切的复角公式（tangent addition formula），但我们用不着它。）当 $u=0$ 时，$z=a=\frac{1}{\sqrt{3}}$。当 $u=a$ 时，

$$z=\frac{2/\sqrt{3}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}=\sqrt{3}.$$

因此

$$t(\tfrac{1}{\sqrt{3}})=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

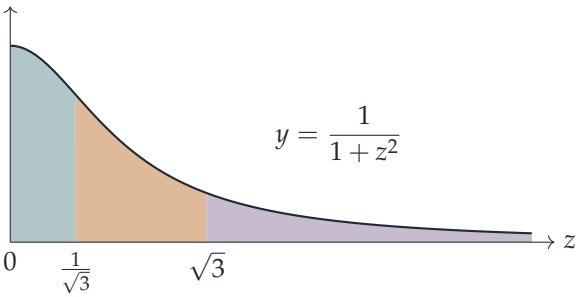
最后一步，把范围 $[0,\infty)$ 在 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 和 $\sqrt{3}$ 处分开：

$$\tfrac{1}{2}p=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}+\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}+\int_{\sqrt{3}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}.$$

第一段按定义就是 $t(\frac{1}{\sqrt{3}})$，第二段按刚才证明的结果也是 $t(\frac{1}{\sqrt{3}})$。由第 (i) 部分取 $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$，第三段是 $\int_{1/x}^{\infty}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}=t(x)=t(\frac{1}{\sqrt{3}})$，同样如此。因此

$$3\,t(\tfrac{1}{\sqrt{3}})=\tfrac{1}{2}p.$$

下图显示这三段：$1/(1+z^2)$ 之下由 0 至 ∞ 的面积，分成三个面积相等的区域。



验算

以数值方法（辛普森法则（Simpson's rule））计算，$t(\frac{1}{\sqrt{3}})\approx 0.5235988$，$\int_{1/\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}z}{1+z^2}\approx 0.5235988$，而 $p\approx 3.1415927$，所以 $3t(\frac{1}{\sqrt{3}})\approx 1.5707963\approx\frac{1}{2}p$。同样，$s(\frac{1}{\sqrt{2}})\approx t(1)\approx 0.7853982\approx\frac{1}{4}p$。当然，$p$ 其实就是 π，而这些结果说的是 $\arctan\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$，$\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}}=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$；你可以用这些来验算，但不可写在答案里。

常见错误

- 忘记 $u = 1/v$ 会把积分方向倒转；$\mathrm{d}u$ 中的负号正好把上下限的次序还原。
- 在第 (iii) 部分，做完代换便停下来：由 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 至 $\sqrt{3}$ 的积分只是三段相等部分的其中一段，而 $\sqrt{3}$ 之后的那一段需要用到第 (i) 部分。
- 没有检查在积分范围内 $1 - au \neq 0$；这里 $au \leq \frac{1}{3}$，所以代换成立。

STEP 之外

这道题让我们一窥分析学家如何严格地定义三角函数（trigonometric functions）：先把 $\arctan x$ 定义为 $\int_0^x \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$，再把 π 定义为它在无穷远处的极限（limit）的两倍，然后靠这类代换推导出所有性质，完全不用几何。第 (iii) 部分的代换其实是 tan 的复角公式的化身，用同样的方法可以证明：当 $xy < 1$ 时，$t(x) + t(y) = t\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$。Abbott 的 *Understanding Analysis* 说明了如何利用积分和幂级数（power series）为这类定义奠定稳固的基础。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。