详细解答

STEP III 2007，第 6 题

纯数学 · 复数与圆

STEP III 2007，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s3-q6

关键思路

在以原点为圆心、半径为 a 的圆上，取共轭（conjugation）与反演（inversion）是同一回事：$pp^* = a^2$，所以 $p^* = a^2/p$。单凭这一点，题目中每一个共轭都可化为普通的分式，恒等式（identity）随即得出。至于垂直，判别方法是两条弦所对应的向量之比为纯虚数（purely imaginary）。利用恒等式，这个判别法便化为一个简单的乘积条件。对于多边形，这个乘积条件就是一个递推关系（recurrence）：一旦选定 B_1，其余每一个 B_k 都随之确定，唯一的问题是这条链绕回 B_1 时能否闭合。

解答

恒等式

由于 P 在圆上，$|p| = a$，所以 $pp^* = a^2$，即 $p^* = a^2/p$；同理 $q^* = a^2/q$。因此

$$p^* - q^* = \frac{a^2}{p} - \frac{a^2}{q} = \frac{a^2(q-p)}{pq} = -\frac{a^2(p-q)}{pq}.$$

因为 $p \neq q$（而且由 $a > 0$ 知 $p, q \neq 0$），上式不等于零，所以可以移项得

$$pq = -a^2 \frac{p-q}{p^* - q^*},$$

这正是所求。

互相垂直的弦

弦（chord）PQ 的方向由复数 $p-q$ 给出，而 RS 的方向由 $r-s$ 给出。两个非零复数互相垂直，当且仅当它们的比

$$w=\frac{p-q}{r-s}$$

是纯虚数，因为这个比的辐角（argument）就是两者之间的夹角。

> **想一想** 怎样把“w 是纯虚数”化为一条可以运用的方程?

非零的 w 是纯虚数，当且仅当 $w^*=-w$，即 $w/w^*=-1$。对两条弦分别使用恒等式（第二条以 r,s 代替 p,q），

$$\frac{w}{w^*}=\frac{p-q}{p^*-q^*}\cdot\frac{r^*-s^*}{r-s}=\frac{-pq/a^2}{-rs/a^2}=\frac{pq}{rs}.$$

所以 $PQ\perp RS$ 当且仅当 $pq/rs=-1$。由于 $rs\neq 0$，这就是说

$$pq+rs=0.$$

这里每一步都可逆，所以我们证明的比题目要求的稍多：对于这个圆的弦，$PQ\perp RS\iff pq+rs=0$。下文需要用到逆命题（converse）这个方向。

多边形问题

设点 A_k 和 B_k 分别由 α_k 和 β_k 表示。根据上一部分（及其逆命题），那 n 个垂直条件恰好就是

$$\beta_k\beta_{k+1}=-\alpha_k\alpha_{k+1}\quad(k=1,\dots,n-1),\qquad \beta_n\beta_1=-\alpha_n\alpha_1,$$

前提是相邻的 B 互不相同，使每条 B_kB_{k+1} 确实是一条弦。

选定 β_1。由于 $\beta_{k+1}=-\alpha_k\alpha_{k+1}/\beta_k$，首 $n-1$ 个条件便依次确定 $\beta_2,\beta_3,\dots,\beta_n$，而且每个 β_{k+1} 的模（modulus）自动等于 a。算出最初几个：

$$\beta_2=-\frac{\alpha_1\alpha_2}{\beta_1},\qquad \beta_3=-\frac{\alpha_2\alpha_3}{\beta_2}=\frac{\alpha_3\beta_1}{\alpha_1},\qquad \beta_4=-\frac{\alpha_3\alpha_4}{\beta_3}=-\frac{\alpha_1\alpha_4}{\beta_1},$$

再用简单的归纳法（induction）可得

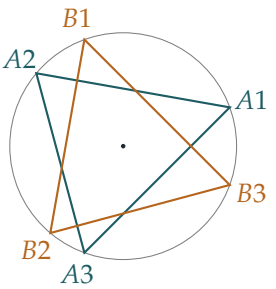
$$\beta_k=\frac{\alpha_k\beta_1}{\alpha_1}\ (k\text{ 为奇数}),\qquad \beta_k=-\frac{\alpha_1\alpha_k}{\beta_1}\ (k\text{ 为偶数}).$$

（若公式对 k 成立，则由 $\beta_{k+1}=-\alpha_k\alpha_{k+1}/\beta_k$ 可得 $k+1$ 时的另一种形式。）现在一切取决于最后一个条件 $\beta_n\beta_1=-\alpha_n\alpha_1$ 是否成立。

$n=3$。这时 $\beta_3=\alpha_3\beta_1/\alpha_1$，所以闭合条件是

$$\frac{\alpha_3\beta_1^2}{\alpha_1}=-\alpha_3\alpha_1\iff\beta_1^2=-\alpha_1^2\iff\beta_1=\pm\mathrm{i}\,\alpha_1.$$

所以 B_1 只有两个选择。取 $\beta_1 = \mathrm{i}\alpha_1$ 时，由公式得 $\beta_2 = \mathrm{i}\alpha_2$ 和 $\beta_3 = \mathrm{i}\alpha_3$；取 $\beta_1 = -\mathrm{i}\alpha_1$ 时，每个 $\beta_k = -\mathrm{i}\alpha_k$。两种情况下，三角形 $B_1B_2B_3$ 都是三角形 $A_1A_2A_3$ 绕圆心旋转一个直角而成。它的顶点互不相同，所以两个选择都确实可行；而把一条弦旋转 $90°$，所得的弦当然与原来的弦垂直。



图中所示的是 $\beta_1 = \mathrm{i}\alpha_1$ 这个选择：琥珀色三角形的每一边，都是蓝绿色三角形的对应边转过 $90°$ 而成。

$n = 4$。这时 $\beta_4 = -\alpha_1\alpha_4/\beta_1$，所以不论 β_1 是甚么，

$$\beta_4\beta_1 = -\alpha_1\alpha_4$$

都自动成立。因此 B_1 可以选在圆上*任何位置*，有无穷多个选择。唯一的例外，是会令两个相邻的 B 重合的有限多个位置。例如，$\beta_1 = \beta_2$ 需要 $\beta_1^2 = -\alpha_1\alpha_2$，这排除了两个点。四种重合情况各自最多排除两个点，所以最多有八个位置被排除。

$n > 4$。同样的计算对每个 n 都适用，而且只有 n 的奇偶性（parity）起作用：

- 若 n 是奇数，闭合条件是 $\beta_1^2 = -\alpha_1^2$。恰好有两个选择 $\beta_1 = \pm\mathrm{i}\alpha_1$，而 $B_1B_2\cdots B_n$ 就是多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 绕圆心旋转 $\pm 90°$ 而成；
- 若 n 是偶数，闭合条件自动成立。除了最多 $2n$ 个会令相邻的 B 重合的位置外，B_1 可以是圆上任何一点，所以有无穷多个选择。

验算

- 试取 $p = a$，$q = \mathrm{i}a$：这时 $pq = \mathrm{i}a^2$，而 $-a^2(a - \mathrm{i}a)/(a + \mathrm{i}a) = -a^2 \cdot (-\mathrm{i}) = \mathrm{i}a^2$，与预期相符。
- 试取直径 $p = a$，$q = -a$ 和 $r = \mathrm{i}a$，$s = -\mathrm{i}a$，两者互相垂直：$pq + rs = -a^2 + a^2 = 0$。
- 数值方面，我们以 1000 个随机构形测试了恒等式和判别准则 $PQ \perp RS \iff pq + rs = 0$。对 $n = 3, \ldots, 9$，我们由随机的起点出发执行递推。当 n 是奇数时，让 B_1 以 $0.1°$ 为步长绕圆扫描一周，这条链只在 $\beta_1 = \pm\mathrm{i}\alpha_1$ 附近闭合。当 n 是偶数时，它每次都闭合，而且所有弦都互相垂直，误差仅为舍入误差。

常见错误

- 只证明“垂直 $\Rightarrow pq + rs = 0$”。处理多边形时还需要逆命题，才能肯定我们构造出来的 β 确实给出互相垂直的弦。
- 把“垂直即 w 是虚数”写成 $w + w^* = 0$，却没有指出 $w \neq 0$。这里由于各点互不相同，$w \neq 0$ 是有保证的。
- 当 n 是偶数时，说“每个 B_1 都可行”，却没有留意到有少数位置会令两个相邻的 B 重合，以致那条“弦”没有方向。

STEP 之外

映射 $z \mapsto a^2/z^*$ 是关于圆 $|z| = a$ 的反演，而圆上的点在这个映射下保持不动（$p = a^2/p^*$），正是整道题目的动力所在。反演是莫比乌斯变换（Möbius transformation）的一种，而莫比乌斯变换在复分析与几何的入门课程中占有核心地位。多边形的论证带有单值性（monodromy）的味道：沿着一连串别无选择的步骤绕一圈，然后问是否回到起点，而答案取决于 n 的奇偶性。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可视化复分析》）把反演和这些几何思想阐述得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。