详细解答

STEP III 2007，第 5 题

纯数学 · 高阶导数与数学归纳法

STEP III 2007，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s3-q5

关键思路

只要把 r 和 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x$ 都单用 θ 表示，一切便变得简单。由 $\coth\theta = x$ 可得 $r = 1/\sinh\theta$，继而有 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}x = \cosh\theta$ 及 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$。对 $\cosh n\theta / r^n$ 求导，所得的恰好就是 $\cosh(n+1)\theta$ 的复角公式（compound-angle formula），于是便可用归纳法（induction）证明。

解答

准备工作

由于 $x > 1$，方程 $\coth\theta = x$ 有唯一满足 $\theta > 0$ 的解，因此 $\sinh\theta > 0$。利用 $\coth^2\theta - 1 = \operatorname{cosech}^2\theta$，

$$r^2 = x^2 - 1 = \coth^2\theta - 1 = \frac{1}{\sinh^2\theta}, \qquad \text{所以} \qquad r = \frac{1}{\sinh\theta},$$

这里取正根，因为 r 和 $\sinh\theta$ 都是正数。

整个解答只靠两个导数（derivative）。把 $\coth\theta = x$ 对 x 求导，

$$-\operatorname{cosech}^2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = -\sinh^2\theta = -\frac{1}{r^2}.$$

把 $r^2 = x^2 - 1$ 求导，得 $2r\,\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = 2x$，所以

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{r} = \coth\theta\,\sinh\theta = \cosh\theta.$$

首两个导数

由于 $y = \ln r^2 = 2\ln r$,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{2\cosh\theta}{r},$$

正是所求。至于二阶导数，最简洁的做法是写成 $1/r = \sinh\theta$，于是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\cosh\theta\sinh\theta = \sinh 2\theta$。由链式法则（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 2\cosh 2\theta\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x} = -\frac{2\cosh 2\theta}{r^2},$$

正是所求。

三阶导数

现在把二阶导数写成 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -2\cosh 2\theta\sinh^2\theta$，并运用积法则（product rule），其中 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} &= -2(2\sinh 2\theta\sinh^2\theta + 2\cosh 2\theta\sinh\theta\cosh\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}x}\\ &= 4\sinh^3\theta(\cosh 2\theta\cosh\theta + \sinh 2\theta\sinh\theta)\\ &= 4\sinh^3\theta\cosh 3\theta,\end{aligned}$$

最后一步用了恒等式 $\cosh(A+B) = \cosh A\cosh B + \sinh A\sinh B$。所以

$$\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = \frac{4\cosh 3\theta}{r^3}.$$

一般公式

从 $2\cosh\theta/r$、$-2\cosh 2\theta/r^2$、$4\cosh 3\theta/r^3$ 这个规律可见，系数应为 $2\cdot 0!$、$-2\cdot 1!$、$2\cdot 2!$，因此我们猜想

$$\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}\,\frac{2\,(n-1)!\,\cosh n\theta}{r^n} \qquad (n \geq 1).$$

? **想一想** 刚才求三阶导数的那个计算，推广到一般情况会是怎样的?

那就是求 $\cosh n\theta/r^n = \cosh n\theta\ \sinh^n\theta$ 的导数。由积法则和链式法则，并利用 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = -\sinh^2\theta$,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cosh n\theta\ \sinh^n\theta) &= (n\sinh n\theta\ \sinh^n\theta + n\cosh n\theta\ \sinh^{n-1}\theta\cosh\theta)(-\sinh^2\theta)\\ &= -n\sinh^{n+1}\theta\,(\cosh n\theta\cosh\theta + \sinh n\theta\sinh\theta)\\ &= -n\sinh^{n+1}\theta\ \cosh(n+1)\theta,\end{aligned}$$

即

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\cosh n\theta}{r^n}\right) = -\frac{n\cosh(n+1)\theta}{r^{n+1}}.$$

现在进行归纳。公式对 $n = 1$ 成立（它就是上面求得的一阶导数）。假设公式对某个 $n = k \geq 1$ 成立。那么，把上面的计算用于 $n = k$，

$$\frac{\mathrm{d}^{k+1}y}{\mathrm{d}x^{k+1}} = (-1)^{k-1}\,2\,(k-1)!\cdot\left(-\frac{k\cosh(k+1)\theta}{r^{k+1}}\right) = (-1)^k\,\frac{2\,k!\,\cosh(k+1)\theta}{r^{k+1}},$$

这正是 $n = k+1$ 时的公式。由归纳法，

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}\,\frac{2\,(n-1)!\,\cosh n\theta}{r^n} \quad \text{对所有} n \geq 1.}$$

（$n = 2$ 和 $n = 3$ 的情况与我们直接求得的结果一致。）

另一途径

部分分式（partial fractions）提供了一个独立的推导。由于 $y = \ln(x-1) + \ln(x+1)$，

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = (-1)^{n-1}(n-1)!\,[(x-1)^{-n} + (x+1)^{-n}].$$

但 $x \pm 1 = \dfrac{\cosh\theta \pm \sinh\theta}{\sinh\theta} = r\,\mathrm{e}^{\pm\theta}$，所以方括号内的式子等于 $r^{-n}(\mathrm{e}^{-n\theta} + \mathrm{e}^{n\theta}) = 2\cosh n\theta / r^n$，得出相同的公式。这也解释了这个代换的来历：$\theta$ 就是 $\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ 的一半。

验算

- 当 $x = 2$ 时：由部分分式得 $\mathrm{d}^3y/\mathrm{d}x^3 = 2\left(1 + \frac{1}{27}\right) = \frac{56}{27} \approx 2.0741$，而以 $\theta = \tanh^{-1}\frac{1}{2}$、$r = \sqrt{3}$ 代入 $4\cosh 3\theta / r^3$ 亦得相同的值。
- 我们在 200 个满足 $x > 1$ 的随机点上，把首三个导数与 $\ln(x^2-1)$ 的有限差分（finite differences）作了比较，又就 $n \leq 14$ 把一般公式与部分分式的形式作了比较（两者相符至约 10^{-14}）。
- 正负号：当 $x > 1$ 时，$\ln(x^2-1)$ 递增而且是凹的（concave），与 $y' > 0$ 及 $y'' < 0$ 吻合。

常见错误

- 写成 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}x = +\sinh^2\theta$：$\coth\theta$ 的导数是 $-\operatorname{cosech}^2\theta$，而正是这个负号令各阶导数的正负号交替出现。

- 阶乘（factorial）差了一位：第 n 阶导数所带的是 $(n-1)!$，因为一阶导数的系数是 $2 = 2 \cdot 0!$。
- 只验证几个情况便停下来：题目要求“with proof”（附证明），就必须写出一般的归纳步骤。

STEP 之外

每一阶导数都有如此简洁的闭合形式（closed form），让我们一窥复分析（complex analysis）的面貌：$\ln(x^2-1)$ 在 $x = \pm 1$ 处有奇点（singularities），而它的高阶导数正是由到这些奇点的距离所支配，在这里就是 $x \mp 1 = re^{\mp\theta}$。在大学一年级的分析课程中，要估计泰勒级数（Taylor series）余项的界，并求出其收敛半径（radius of convergence），所需要的正是这类公式。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 把奇点为何支配幂级数（power series）解释得十分精彩。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。