详细解答

STEP III 2007，第 4 题

纯数学 · 参数曲线与曲率

> **STEP III 2007，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q4

关键思路

一切都建基于 $\dot{x}$ 的一条简洁公式。看似棘手的一项 $\ln\tan\frac{1}{2}t$ 求导后得 $1/\sin t$，于是 $\dot{x}$ 便化简为 $a\cos^2 t/\sin t$。一旦求得 $\dot{x}$ 和 $\dot{y}$，斜率（gradient）、切线（tangent）、曲率（curvature）和法线（normal）都可以用直接的坐标几何逐一得出。把单位切向量（unit tangent）写成 $(\cos t, \sin t)$，可令最后一部分十分简短。

解答

斜率

由于 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\tan\frac{1}{2}t = \dfrac{\frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}t}{\tan\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{2\sin\frac{1}{2}t\cos\frac{1}{2}t} = \dfrac{1}{\sin t}$，我们得到

$$\begin{aligned}\dot{x} &= a\left(-\sin t + \frac{1}{\sin t}\right) = a\,\frac{1-\sin^2 t}{\sin t} = \frac{a\cos^2 t}{\sin t},\\ \dot{y} &= a\cos t.\end{aligned}$$

当 $0 < t < \frac{1}{2}\pi$ 时两者皆为正数，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = a\cos t\cdot\frac{\sin t}{a\cos^2 t} = \tan t,$$

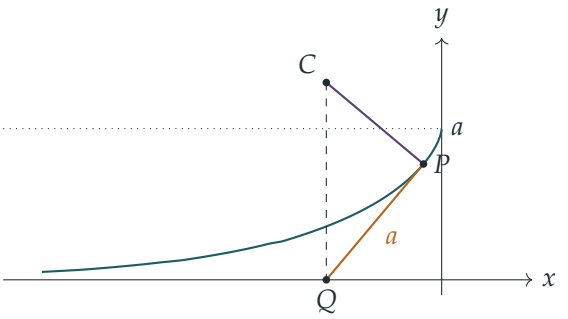
正如题目所求。

草图

▶ 当 $t \to 0^+$ 时，$\tan\frac{1}{2}t \to 0^+$，所以 $x \to -\infty$ 而 $y \to 0$。x 轴是一条渐近线（asymptote）。

- 当 $t \to \frac{1}{2}\pi^-$ 时，$x \to a(0+\ln 1) = 0$ 而 $y \to a$。曲线终止于 $(0,a)$，该处的斜率 $\tan t \to \infty$，所以该处的切线是垂直的。
- 由于 $\dot{x} > 0$，x 随 t 递增，斜率 $\tan t$ 亦然。所以曲线稳步上升，并且向上凹（concave upwards），而 y 介乎 0 与 a 之间。

这条曲线就是曳物线（tractrix）。图中亦标示了后面各部分所用的点 P、Q 和 C。



切线：$PQ = a$

在 $P = (x,y)$ 的切线斜率为 $\tan t$。由 P 沿水平方向往回走 $y/\tan t$ 的距离，切线便与 $y = 0$ 相交，所以

$$x_Q = x - \frac{y}{\tan t} = x - \frac{a\sin t\cos t}{\sin t} = x - a\cos t.$$

因此 $\overrightarrow{QP} = (a\cos t,\ a\sin t)$，并且

$$PQ = \sqrt{a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t} = a.$$

所以由曲线至 x 轴的切线长度恒为 a。（留待后用：$x_Q = a\ln\tan\frac{1}{2}t$。）

曲率半径

把 $\dot{x}$ 写成 $\dot{x} = a\Big(\dfrac{1}{\sin t} - \sin t\Big)$，求导便容易得多：

$$\ddot{x} = a\Big(-\frac{\cos t}{\sin^2 t} - \cos t\Big), \qquad \ddot{y} = -a\sin t.$$

于是

$$\begin{aligned}\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} &= \frac{a\cos^2 t}{\sin t}(-a\sin t) + a\cos t\cdot a\Big(\frac{\cos t}{\sin^2 t} + \cos t\Big)\\ &= a^2\Big(-\cos^2 t + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} + \cos^2 t\Big) = a^2\cot^2 t,\end{aligned}$$

以及

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2 = a^2\cos^2 t\left(\frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}+1\right) = \frac{a^2\cos^2 t}{\sin^2 t} = a^2\cot^2 t.$$

由于在我们的范围内 $\cot t > 0$，故 $(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{3/2} = a^3\cot^3 t$，因此

$$\rho = \frac{a^3\cot^3 t}{a^2\cot^2 t} = a\cot t,$$

正如题目所求。

曲率中心：CQ 是垂直的

在 P 的切线沿单位向量 $(\cos t, \sin t)$ 的方向，所以法线沿 $(-\sin t, \cos t)$ 或其反方向。

> ? **想一想** 两个法线方向之中，哪一个是“在曲线上方”?

由于 $\cos t > 0$，向量 $(-\sin t, \cos t)$ 的 y 分量为正数。由 P 沿这个方向走一小段，便会到达曲线上方，因为曲线向上凹（而且无论如何，另一个方向只会把我们带往下方）。所以

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OP} + \rho(-\sin t, \cos t) = \big(x - a\cot t\sin t,\ a\sin t + a\cot t\cos t\big).$$

根据切线部分的结果，其 x 坐标为

$$x_C = x - a\cos t = x_Q$$

。所以 C 和 Q 的 x 坐标相同，CQ 平行于 y 轴，正如题目所求。（y 坐标可化简为 $a\sin t + \dfrac{a\cos^2 t}{\sin t} = \dfrac{a}{\sin t}$，所以 $C = \big(a\ln\tan\tfrac{1}{2}t,\ a\operatorname{cosec} t\big)$。）

验算

- 取 $a = 1$ 和 $t = \frac{5\pi}{18}$（$50°$），得 $P \approx (-0.1202, 0.7660)$ 和 $Q \approx (-0.7630, 0)$，由此 $PQ = 1.0000$。公式给出 $C \approx (-0.7630, 1.3054)$，正好在 Q 的正上方。
- 以 2000 组随机的 a 和 t 值作数值检验，其中 $\dot{x}$、$\ddot{x}$ 以有限差分（finite differences）求得，结果与 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \tan t$、$PQ = a$、$\rho = a\cot t$ 和 $x_C = x_Q$ 相符，误差只在舍入误差范围之内。
- 当 $t \to \frac{1}{2}\pi$ 时，$\rho \to 0$：曲线趋近 $(0, a)$ 时弯得愈来愈急（它对 y 轴的镜像与它在该处相接，形成一个尖点（cusp））。当 $t \to 0$ 时，$\rho \to \infty$，与曲线逐渐贴平于渐近线的情况吻合。

常见错误

- 对 $\ln\tan\frac{1}{2}t$ 求导时，漏掉由链式法则（chain rule）而来的因子 $\frac{1}{2}$。答案必须是 $1/\sin t$。

- 把 $\dot{x}$ 留作 $a(-\sin t + \operatorname{cosec} t)$ 而不加化简。正是 $a\cos^2 t / \sin t$ 这个形式，才令其后每一部分都整齐利落。
- 采用法线方向 $(\sin t, -\cos t)$，这个方向指向曲线下方，会把 C 放在错误的位置。

STEP 之外

设有人沿 x 轴行走，用一条长度为 a 的绳拖着一件重物，重物所走的路径就是曳物线，而 $PQ = a$ 正是这个性质。点 C 描出曲线的*渐屈线*（evolute），即其曲率中心的轨迹（locus）。这里 $C = (a\ln\tan\frac{1}{2}t,\ a\operatorname{cosec} t)$ 原来位于一条悬链线（catenary）上。把曳物线绕其渐近线旋转，便得到伪球面（pseudosphere），这是一个具有恒定负曲率的曲面，也是双曲几何（hyperbolic geometry）的一个模型。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 对伪球面有一段优美的几何论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。