详细解答

STEP III 2007，第 3 题

纯数学 · 斐波那契恒等式

STEP III 2007，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s3-q3

关键思路

这里每一条恒等式的证法都一样：取下标最大的那一项，用递推关系（recurrence）$F_m = F_{m-1} + F_{m-2}$ 把它拆开。这样做一次，(ii) 中的式子就变成所有下标都减一的式子；做两次，便回到同一形状而下标全部减二，这正是归纳法（induction）所需要的。至于 (iv) 的整除性（divisibility），留意 $F_{2n-1} + F_{2n} = F_{2n+1}$，所以 F_{2n-1}^2 与 F_{2n}^2 除以 F_{2n+1} 时余数相同。

解答

第 (i) 部分

由 $F_1 = F_2 = 1$ 开始，把相邻两项相加：

$$F_3 = 2, \quad F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13, \quad F_8 = 21.$$

第 (ii) 部分

设 $k \geq 1$，使每一项都有定义。把下标最大的项 F_{2k+3} 换成 $F_{2k+2} + F_{2k+1}$：

$$\begin{aligned} F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 &= (F_{2k+2} + F_{2k+1})F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 \\ &= F_{2k+1}^2 + F_{2k+2}(F_{2k+1} - F_{2k+2}) \\ &= F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}, \end{aligned}$$

因为由递推关系可知 $F_{2k+2} - F_{2k+1} = F_{2k}$。这就是 $-F_{2k+2}F_{2k} + F_{2k+1}^2$，正如所求。

第 (iii) 部分

以 $P(n)$ 表示命题 $F_{2n+1}F_{2n-1} - F_{2n}^2 = 1$。

基础情况（*base case*）。当 $n = 1$ 时：$F_3F_1 - F_2^2 = 2 \cdot 1 - 1^2 = 1$，所以 $P(1)$ 成立。

归纳步骤（*inductive step*）。假设 $P(k)$ 对某个 $k \geq 1$ 成立。由第 (ii) 部分，

$$F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 = F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}.$$

> **想一想** 第 (ii) 部分只把下标减了一。怎样才能一路退回到 $P(k)$?

再用一次同样的技巧，这次拆开下标最大的项 $F_{2k+2} = F_{2k+1} + F_{2k}$：

$$\begin{aligned} F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k} &= F_{2k+1}^2 - (F_{2k+1} + F_{2k})F_{2k} \\ &= F_{2k+1}(F_{2k+1} - F_{2k}) - F_{2k}^2 \\ &= F_{2k+1}F_{2k-1} - F_{2k}^2, \end{aligned}$$

当中用到 $F_{2k+1} - F_{2k} = F_{2k-1}$（因为 $2k+1 \geq 3$，所以成立）。根据归纳假设（hypothesis）$P(k)$，这个式子等于 1。把以上两组等式连起来，

$$F_{2k+3}F_{2k+1} - F_{2k+2}^2 = 1,$$

这就是 $P(k+1)$。由归纳法，$P(n)$ 对所有 $n \geq 1$ 成立。

推论。把 $P(n)$ 移项，

$$F_{2n}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-1},$$

而 F_{2n-1} 是整数（由递推关系可知每个 F_m 都是整数），所以 $F_{2n}^2 + 1$ 可被 F_{2n+1} 整除。

第 (iv) 部分

由递推关系，$F_{2n-1} = F_{2n+1} - F_{2n}$。两边平方，

$$F_{2n-1}^2 = F_{2n+1}^2 - 2F_{2n+1}F_{2n} + F_{2n}^2,$$

所以

$$F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}(F_{2n+1} - 2F_{2n}) + (F_{2n}^2 + 1).$$

第一个括号所在的一项是 F_{2n+1} 的倍数（它的余因子（cofactor）是整数），而由第 (iii) 部分可知 $F_{2n}^2 + 1$ 也是 F_{2n+1} 的倍数。因此 $F_{2n-1}^2 + 1$ 可被 F_{2n+1} 整除。

事实上我们还可以求出商（quotient）。利用 $F_{2n}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-1}$，

$$F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}(F_{2n+1} - 2F_{2n} + F_{2n-1}) = F_{2n+1}(2F_{2n-1} - F_{2n}),$$

而当 $n \geq 2$ 时，括号内的式子是 $F_{2n-1} - F_{2n-2} = F_{2n-3}$。所以 $F_{2n-1}^2 + 1 = F_{2n+1}F_{2n-3}$，与 (iii) 中的恒等式（identity）十分相似。

验算

取 $n = 3$：$F_6^2 + 1 = 65 = 13 \times 5 = F_7F_5$，而 $F_5^2 + 1 = 26 = 13 \times 2 = F_7F_3$。取 $n = 4$：$F_7^2 + 1 = 170 = 34 \times 5 = F_9F_5$。我们亦用电脑验证过，对于直至 37 的每一个 n，(ii) 和 (iii) 中的恒等式、两个整除性命题以及商 F_{2n-3} 全部成立。

常见错误

- 只用 (ii) 来做归纳：它只把下标减一，所得的式子 $F_{2k+1}^2 - F_{2k+2}F_{2k}$ 还不是归纳假设，必须再用一次递推关系。
- 忘记基础情况，或验证时用错下标（$n = 1$ 涉及 F_1、F_2、F_3）。

STEP 之外

第 (iii) 部分是卡西尼恒等式（Cassini's identity）$F_{m+1}F_{m-1} - F_m^2 = (-1)^m$ 的一半，而这条恒等式用行列式（determinant）即可立刻得出：矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^m$ 的元素是 F_{m+1}、F_m、F_m、F_{m-1}，而它的行列式是 $(-1)^m$。像 (iv) 这类整除性的结果，是线性递推数列（linear recurrence）算术的起点，当中大部分工作都靠同余（congruence）完成。想进一步学习数论（number theory），Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（高等算术）是很好的下一步；想了解矩阵的观点，则可读 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数导论）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。