详细解答

STEP III 2007，第 2 题

纯数学 · 二项式幂级数

STEP III 2007，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s3-q2

关键思路

一切都源自同一个二项级数 (binomial series)。只要知道 $(1-4x)^{-1/2}$ 的系数，对级数求导便会带出一个因子 n（把 $(n!)^2$ 变成 $n!\,(n-1)!$），而对它积分则会除以 $n+1$（把 $(n!)^2$ 变成 $n!\,(n+1)!$）。因此，后面每一个和都是第一个级数的导数或积分，在 $|x|<\frac{1}{4}$ 内一个精心挑选的点上取值。

解答

第 (i) 部分

把奇数的乘积同时乘以和除以所欠缺的偶数 $2\cdot4\cdot6\cdots(2n)$：

$$1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdots(2n-1)(2n)}{2\cdot4\cdots(2n)}=\frac{(2n)!}{2^n\,(1\cdot2\cdots n)}=\frac{(2n)!}{2^n\,n!},$$

因为 n 个偶数 $2k$ 各自提供一个因子 2 和一个因子 k。

当 $|4x|<1$，即 $|x|<\frac{1}{4}$ 时，由二项级数得

$$(1-4x)^{-1/2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2n-1}{2}\right)}{n!}(-4x)^n.$$

分子有 n 个因子，每个都是负数，所以它等于 $(-1)^n\,\dfrac{1\cdot3\cdots(2n-1)}{2^n}$。这个 $(-1)^n$ 与 $(-4)^n$ 中的符号互相抵消，而 $4^n/2^n=2^n$，所以 x^n 的系数是

$$\frac{2^n\cdot1\cdot3\cdots(2n-1)}{n!}=\frac{2^n}{n!}\cdot\frac{(2n)!}{2^n\,n!}=\frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

这里用了第一个结果。因此，当 $|x| < \frac{1}{4}$ 时，

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\, x^n,$$

正是所求。

第 (ii) 部分

幂级数（power series）在其收敛区间（interval of convergence）之内可以逐项求导（differentiate term by term），这里的收敛区间是 $|x| < \frac{1}{4}$。对两边求导，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1-4x)^{-1/2} = -\tfrac{1}{2}(1-4x)^{-3/2}\cdot(-4) = 2(1-4x)^{-3/2},$$

而右边的常数项消失，x^n 变成 nx^{n-1}。由于 $n/(n!)^2 = 1/(n!\,(n-1)!)$，

$$2(1-4x)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\, x^{n-1}.$$

乘以 x 便得到我们想要的幂 x^n：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!}\, x^n = \frac{2x}{(1-4x)^{3/2}} \qquad (|x| < \tfrac{1}{4}).$$

现在代入 $x = \frac{6}{25}$,这是容许的,因为 $\frac{6}{25} < \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$。这时 $1-4x = \frac{1}{25}$,所以 $(1-4x)^{3/2} = \frac{1}{125}$,于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n-1)!} \left(\frac{6}{25}\right)^n = 2\cdot\frac{6}{25}\cdot 125 = 60.$$

第 (iii) 部分

> **想一想** 现在阶乘是 $(n+1)!\,n!$ 而不是 $(n!)^2$。对级数做甚么运算才会得出这个结果?

我们需要把第 n 个系数除以 $n+1$，因为 $(n+1)! = (n+1)\,n!$。对 x^n 积分正好做到这一点：$\int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$。幂级数在其收敛区间之内同样可以逐项积分（term-by-term integration），所以当 $|x| < \frac{1}{4}$ 时，我们把第 (i) 部分的级数由 0 积分至 x：

$$\int_0^x (1-4t)^{-1/2}\,\mathrm{d}t = \left[-\tfrac{1}{2}(1-4t)^{1/2}\right]_0^x = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2},$$

于是

$$\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2} = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\, x^{n+1}.$$

接着我们要对上目标和式中的幂。由于 $3^{2n} = 9^n = 9^{n+1}/9$,

$$\frac{2^{n+1}}{3^{2n}} = 9\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1},$$

所以目标和式等于我们的级数在 $x = \frac{2}{9}$ 处的值的 9 倍。这个值是合理的, 因为 $\frac{2}{9} < \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$。在该处, $1 - 4x = \frac{1}{9}$ 而 $\sqrt{1-4x} = \frac{1}{3}$, 由此得

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}(2n)!}{3^{2n}(n+1)!\,n!} &= 9\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!}\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1} \\ &= 9\left(\frac{1-\frac{1}{3}}{2} - \frac{2}{9}\right) = 9\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9}\right) = 1,\end{aligned}$$

正是所求。留意首项 x（即常数 1 的积分）必须减去, 因为和式由 $n = 1$ 开始。

验算

- 在 (i) 中, $n = 2$ 给出 $1 \cdot 3 = 3$ 和 $\frac{4!}{2^2 2!} = 3$; 级数的开首是 $1 + 2x + 6x^2 + 20x^3 + \cdots$, 与平方后的结果吻合: $(1 + 2x + 6x^2)^2(1 - 4x) = 1 + O(x^3)$。
- 以精确分数把 (ii) 的首 3000 项相加, 得 60.000…; 而 (iii) 的首 400 项之和为 1.000…, 准确至机器精度。
- 在 (iii) 中, 首项（$n = 1$）是 $\frac{4\cdot 2}{9\cdot 2} = \frac{4}{9}$, 已占总和 1 的相当大部分; 其后各项大致按 $(8/9)^n$ 的速度递减。

常见错误

- 弄错二项式系数（binomial coefficient）的正负号: 分子有 n 个负因子, $(-4)^n$ 中也有 n 个, 所以它们刚好互相抵消。
- 忘记检查 $\frac{6}{25}$ 和 $\frac{2}{9}$ 是否位于 $|x| < \frac{1}{4}$ 之内; 在这个范围之外, 级数会发散（diverge）。
- 在 (iii) 中, 忘记了对常数 1 积分所得的 x 项, 这样会得出答案 3 而不是 1。

STEP 之外

第 (iii) 部分出现的数 $\frac{(2n)!}{n!\,(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$ 就是卡塔兰数(Catalan numbers)$1, 1, 2, 5, 14, \ldots$, 它们可用来计数加括号的方式、二元树（binary trees）以及许多其他结构的数目, 而 $\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$ 是它们的母函数（generating function）。我们未经证明便使用的事实, 即幂级数在严格位于其收敛半径（radius of convergence）之内的范围可以逐项求导和逐项积

分，是大学一年级分析学（analysis）的标准定理；参见 Abbott 的 *Understanding Analysis*（分析学入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。