详细解答

STEP III 2007，第 12 题

概率与统计 · 随机和

> **STEP III 2007，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q12

关键思路

Y 是一个项数随机的和，所以不能直接套用固定项数的变量之和的法则。窍门是以 N 为条件（condition）：一旦知道 $N = k$，Y 就是 k 个独立（independent）变量的普通和，其平均值（mean）和方差（variance）我们都知道。然后再对 N 的分布取平均，这正是题目第一部分要求 $\mathrm{E}(N)$ 和 $\mathrm{E}(N^2)$ 的原因。

解答

N 的分布

我们假设该数是均匀地随机选取的，因此对 $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$ 有 $\mathrm{P}(N = k) = \frac{1}{2n-1}$。利用 $\sum_{k=1}^{m} k = \frac{1}{2}m(m+1)$ 和 $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{1}{6}m(m+1)(2m+1)$，并取 $m = 2n-1$：

$$\mathrm{E}(N) = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)(2n)}{2} = n,$$
$$\mathrm{E}(N^2) = \frac{1}{2n-1} \cdot \frac{(2n-1)(2n)(4n-1)}{6} = \frac{n(4n-1)}{3}.$$

（平均值 n 亦可由对称性直接看出：n 正是 $1, \ldots, 2n-1$ 的中间一项。）以下会用到

$$\mathrm{Var}(N) = \frac{n(4n-1)}{3} - n^2 = \frac{n^2 - n}{3} = \frac{n(n-1)}{3}.$$

以 N 为条件

固定 k，并假设 $N = k$。由于各 X_i 与 N 独立，以 $N = k$ 为条件并不会改变它们的分布，所以在已知 $N = k$ 的情况下，$Y = X_1 + \cdots + X_k$，即 k 个独立变量之和，每个变量的平

均值为 μ，方差为 σ^2。因此

$$\mathrm{E}(Y \mid N=k) = k\mu, \qquad \mathrm{Var}(Y \mid N=k) = k\sigma^2,$$

其中第二式用到各 X_i 互相独立（方差可以相加）。于是

$$\mathrm{E}(Y^2 \mid N=k) = \mathrm{Var}(Y \mid N=k) + (\mathrm{E}(Y \mid N=k))^2 = k\sigma^2 + k^2\mu^2.$$

想一想 怎样由条件期望值（conditional expectation）回到普通的期望值?

根据全期望定律（law of total expectation，又称分割定理 partition theorem）：$\mathrm{E}(g(Y,N)) = \sum_k \mathrm{P}(N=k)\,\mathrm{E}(g(Y,N) \mid N=k)$。在每一项之内，$N$ 只不过是数字 k。

Y 的平均值

$$\mathrm{E}(Y) = \sum_k \mathrm{P}(N=k)\,k\mu = \mu\,\mathrm{E}(N) = n\mu,$$

正是所求。

协方差

已知 $N=k$ 时，$YN = kY$，所以 $\mathrm{E}(YN \mid N=k) = k\cdot k\mu = k^2\mu$。因此 $\mathrm{E}(YN) = \mu\,\mathrm{E}(N^2)$，而协方差（covariance）为

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Y,N) &= \mathrm{E}(YN) - \mathrm{E}(Y)\,\mathrm{E}(N) = \mu\,\mathrm{E}(N^2) - n\mu\cdot n \\ &= \mu\,\mathrm{Var}(N) = \tfrac{1}{3}n(n-1)\mu,\end{aligned}$$

这就是所要求的结果。

Y 的方差

把 $\mathrm{E}(Y^2 \mid N=k) = k\sigma^2 + k^2\mu^2$ 对 N 取平均：

$$\mathrm{E}(Y^2) = \sigma^2\,\mathrm{E}(N) + \mu^2\,\mathrm{E}(N^2) = n\sigma^2 + \frac{n(4n-1)}{3}\mu^2.$$

因此

$$\mathrm{Var}(Y) = n\sigma^2 + \frac{n(4n-1)}{3}\mu^2 - n^2\mu^2 = n\sigma^2 + \frac{n(n-1)}{3}\mu^2.$$

这两项各有自然的含义：$n\sigma^2$ 是试验次数固定时 Y 的平均离散程度，而 $\frac{1}{3}n(n-1)\mu^2 = \mu^2\,\mathrm{Var}(N)$ 则是因为不知道试验次数而额外产生的离散程度。

验算

- 若 $n = 1$，则必有 $N = 1$，各公式化为 $\mathrm{E}(Y) = \mu$、$\mathrm{Cov}(Y, N) = 0$ 和 $\mathrm{Var}(Y) = \sigma^2$，与单独一个 X_1 的情况相符。
- 若 $\mu = 0$，则额外的一项消失：项数不再影响平均值，所以它既不会增加离散程度，也不会与 Y 相关。
- 取 $n = 2$，并设每个 X_i 各以概率 $\frac{1}{2}$ 取 0 或 1。那么 $N \in \{1, 2, 3\}$，而 $Y \mid N \sim \mathrm{B}(N, \frac{1}{2})$；公式给出 $\mathrm{Var}(Y) = 2 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3}$。我们已逐一列举 (N, Y) 的联合分布（joint distribution），就 $n = 1, \ldots, 6$ 以及 X_i 的几种不同分布，核实了这个数值和所有结果。

常见错误

- 只写 $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(N)\sigma^2$，忘记了 N 本身也会变动。第二项才是整题的重点。
- 把 Y 和 N 当作独立，得出 $\mathrm{Cov}(Y, N) = 0$。当 $\mu > 0$ 时，试验次数越多，和就越大，所以两者是正相关的。

STEP 之外

Y 是一个随机和（random sum，即复合分布 compound distribution），而方差的结果是全方差定律（law of total variance）的一个特例：$\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{Var}(Y \mid N)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y \mid N))$，在这里即 $\sigma^2\mathrm{E}(N) + \mu^2\mathrm{Var}(N)$。随机和可用作保险索偿和分支过程（branching processes）的模型，而用概率生成函数（probability generating functions）处理则十分简洁：$G_Y(s) = G_N(G_X(s))$。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）正是以这种方法处理随机和与分支过程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。