详细解答

STEP III 2007，第 11 题

力学 · 滚过边缘

> **STEP III 2007，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q11

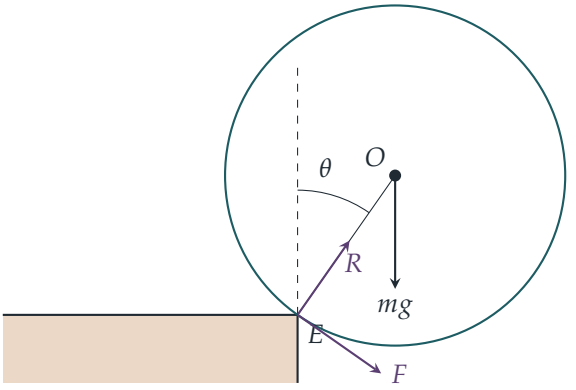
关键思路

轮缘一到达桌边，桌边便成为支点（pivot）：轮缘上与桌边接触的那一点是静止的，所以轮心沿着以桌边为圆心、半径为 a 的圆运动。我们把桌边的接触力分解为沿半径方向的分量 R（法向反作用力，normal reaction）和沿轮缘方向的分量 F（摩擦力，friction），再与质心（centre of mass）的运动作比较。整道题的关键在于质量位于何处。在 (i) 中，全部质量都在轮心，所以轮子对其中心的转动惯量（moment of inertia）为零。在 (ii) 中，质量分布在轮缘上，摩擦力正是由此而生。

解答

模型与记号。轮缘（rim）、轮辐（spokes）和圆环（hoop）都是轻而刚硬的；轮毂（hub）和两个质点（particles）都视为质点。设 E 为桌边上与轮缘接触的点，O 为轮心，θ 为 EO 与竖直向上方向所成的角，所以在轮子到达桌边的一刻 $\theta = 0$。只要轮缘与 E 保持接触而不滑动，轮缘上位于 E 的那个物质点便是静止的。因此这个刚体（rigid body）绕 E 转动，角速率（angular speed）为 $\dot{\theta}$，而 O 沿着以 E 为圆心、半径为 a 的圆运动，速率为 $a\dot{\theta}$。

在 E 的接触力有一个沿 EO 方向（背离 E）的分量 R，以及一个垂直于 EO 的分量 F，后者以 θ 增加的方向为正。由于 E 静止，接触力不作功，所以能量守恒（conservation of energy）。



图中 R 沿 EO 作用，而 F 则按其正方向绘出。

质心 G 与 E 的距离为 a，其加速度沿运动方向的分量为 $a\ddot{\theta}$，指向 E 的分量为 $a\dot{\theta}^2$。分解作用于整个物体的外力（重力 mg 和接触力）：

$$\text{沿运动方向：}\quad ma\ddot{\theta} = mg\sin\theta + F, \tag{1}$$

$$\text{指向}E\text{：}\quad ma\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - R. \tag{2}$$

在两部分中，质心都位于 O（即轮毂；亦即两个质点的中点），所以 (1) 和 (2) 在两部分都成立。

第 (i) 部分

轮子在桌面上以恒定速率 u 运动，所以在 $\theta = 0$ 时有 $\dot{\theta} = u/a$。唯一的动能是轮毂的动能 $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2$，而轮毂下降了 $a(1-\cos\theta)$，所以

$$a^2\dot{\theta}^2 = u^2 + 2ga(1-\cos\theta).$$

对时间求导，并约去 $2a\dot{\theta}$（它不为零，因为 $\dot{\theta} \geq u/a > 0$）：

$$a\ddot{\theta} = g\sin\theta.$$

代入 (1) 得 $F = 0$：**摩擦力为零**，正如所求。

这个结果还有一个直接的理由。轮缘和轮辐都是轻的，所以作用于它们的各力对 O 的总力矩（moment）必须为零。这些力是在 E 的接触力，以及轮毂在 O 施加的力，而后者对 O 没有力矩。接触力对 O 的力矩是 Fa，所以 $F = 0$。

由 (2)，法向反作用力为

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{a}(u^2 + 2ga(1-\cos\theta)) = mg(3\cos\theta - 2) - \frac{mu^2}{a}.$$

在 $\theta = 0$ 时，这个值是 $m(g - u^2/a) > 0$，因为 $u^2 < ag$，所以轮子不会立即离开桌边。其后 R 随 θ 增加而减少，当 $R = 0$ 时轮缘便失去接触，即当

$$\cos\theta = \frac{2ag + u^2}{3ag},$$

这个值小于 1，因为 $u^2 < ag$。此时轮毂已下降了

$$a(1 - \cos\theta) = a \cdot \frac{3ag - 2ag - u^2}{3ag} = \frac{ag - u^2}{3g},$$

正如所求。由于自始至终 $F = 0$，不滑动的假设根本无须依靠摩擦力来维持，所以以上分析一直到这一点都成立。

第 (ii) 部分

> **想一想** 圆环绕 E 转动时，两个质点在哪里?

在 $\theta = 0$ 时，通过两个质点的直径是竖直的，所以下方的质点位于接触点 E。其后圆环作为刚体绕着位于 E 的物质点转动，而这个物质点正是该质点，所以该质点一直留在 E。另一个质点则一直留在直径的另一端，沿 EO 方向与 E 相距 $2a$。

因此对 E 的转动惯量是 $\frac{m}{2}(2a)^2 = 2ma^2$。圆环在桌面上以恒定速率 u 滚动（没有任何力作功），所以在 $\theta = 0$ 时 $\dot\theta = u/a$。运动中的质点比 E 高出 $2a\cos\theta$，由能量守恒得

$$\tfrac{1}{2}(2ma^2)\dot\theta^2 + \tfrac{m}{2}g(2a\cos\theta) = \tfrac{1}{2}(2ma^2)\frac{u^2}{a^2} + \tfrac{m}{2}g(2a), \qquad \text{所以} \qquad a^2\dot\theta^2 = u^2 + ga(1 - \cos\theta).$$

求导并约去 $2a\dot\theta \neq 0$，得 $a\ddot\theta = \frac{1}{2}g\sin\theta$。于是由 (1) 得

$$F = ma\ddot\theta - mg\sin\theta = -\tfrac{1}{2}mg\sin\theta.$$

所以对每一个 $\theta > 0$，**摩擦力都不为零**。(它的大小是 $\frac{1}{2}mg\sin\theta$，方向与 O 的运动方向相反。) 与 (i) 不同，现在轮缘带有质量，所以圆环需要一个对 O 的力矩 (torque)，才能使它的转动跟得上 O 的运动，而只有摩擦力能够提供这个力矩。

由 (2)，

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{a}(u^2 + ga(1 - \cos\theta)) = mg(2\cos\theta - 1) - \frac{mu^2}{a}.$$

在 $\theta = 0$ 时，$R = m(g - u^2/a) > 0$ 而 $F = 0$，所以越过桌边的运动确实是在不滑动的情况下开始的。假如圆环一直保持接触而不滑动，R 便会在以下角度降至零:

$$\cos\theta_1 = \frac{ag + u^2}{2ag} < 1,$$

这里用到了 $u^2 < ag$。所以 $\theta_1 > 0$，而在该处 $|F| = \frac{1}{2}mg\sin\theta_1 > 0$。

想一想 为甚么这样就必定会在失去接触之前滑动?

设摩擦系数（coefficient of friction）为 μ，不滑动的条件是 $|F| \le \mu R$。当 $\theta \to \theta_1$（从下方趋近）时，$R \to 0^+$ 但 $|F| \to \frac{1}{2}mg\sin\theta_1 > 0$，所以 $|F|/R \to \infty$。因此无论 μ 取甚么（有限）值，总有一个角 $\theta < \theta_1$，在 R 仍然为正的时候，$|F|$ 就必须超过 μR。所以圆环**在与桌子失去接触之前便会滑动**。

验算

- 在 (i) 中，若 $u^2 \to ag$，下降的距离趋向 0：此时轮毂在 $\theta = 0$ 已处于即将飞离的临界状态，该处 $g = u^2/a$。若 $u \to 0$，下降的距离是 $a/3$，这正是质点从光滑球面顶点由静止开始滑下的那个熟悉结果。
- 取 $a = 1\,\mathrm{m}$、$u = 2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 和 $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，以数值方法逐步求解方程，在 (i) 中得出下降距离为 0.1974 m，与 $(ag - u^2)/(3g)$ 吻合。在 (ii) 中我们得出 $\cos\theta_1 = 0.7039$，而且 $|F|/R$ 在临近 $R = 0$ 之前已超过 10^4。
- 在 (ii) 中直接由两个质点的加速度计算接触力（$m\ddot{\mathbf{r}}_G$ 减去重力），所得的 F 和 R 都与上面相同。

常见错误

- 在 (ii) 中使用对 O 的滚动动能 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$，却忘记了一旦开始绕支点转动，其中一个质点便固定在 E。对 E 来计算会简洁得多。
- 在桌边沿水平和竖直方向分解力。在边角处，“法向”是沿半径 EO 的方向，而不是竖直方向。
- 仅仅因为 $F \neq 0$ 便断定“它会滑动”。论证需要的是 $R \to 0$ 而 $|F|$ 始终不趋近零。

STEP 之外

两部分的对比在于质量的分布：同样的质心运动，会因转动惯量不同而需要不同的接触力，因为角动量（angular momentum）方程和线动量（linear momentum）方程必须同时满足。在大学第一门力学课程中，这就发展成刚体动力学（rigid-body dynamics）：物体的运动由 $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}_G$ 连同对 G 的力矩方程决定，而接触约束（滚动、滑动、失去接触）则要用不等式 $R \ge 0$ 和 $|F| \le \mu R$ 来检验。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教材）对这两条方程都有透彻的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。