详细解答

STEP III 2007，第 10 题

力学 · 斜面上的抛体

> **STEP III 2007，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s3-q10

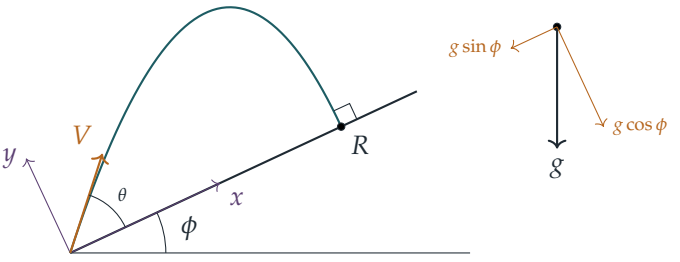
关键思路

取沿斜面及垂直于斜面的坐标轴，重力便化为两个恒定的加速度：沿斜面向下的 $g\sin\phi$ 和指向斜面的 $g\cos\phi$。最特别的条件是质点沿原路折返。光滑平面只能沿垂直于自身的方向施力，所以只有当质点到达时正正垂直撞向平面，平面才能把速度完全反转。两个结果都由这一点得出；余下的只是代数运算，以及一次利用算术平均—几何平均不等式（AM–GM inequality）求最小值。

解答

运动方程

我们把质点（particle）视为只受重力作用的点质量，不计空气阻力。重量 mg 铅垂向下。沿斜面及垂直于斜面分解（resolve）：



加速度在 x 方向为 $-g\sin\phi$，在 y 方向为 $-g\cos\phi$，两者皆为常数。以题目给定的初速度及起点 $(0,0)$ 积分两次，得

$$x = Vt\cos\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\sin\phi, \qquad y = Vt\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2\cos\phi.$$

沿原路折返的条件

质点首次回到平面，是在 $y = 0$ 且 $t > 0$ 之时，即

$$t = T = \frac{2V \sin\theta}{g \cos\phi}.$$

> **想一想** “沿同一路径返回”说明了碰撞的甚么性质?

反弹之后，质点仍然在恒定的重力下运动。若它要沿同一条抛物线（parabola）返回原点，反弹后一刻的速度必须与反弹前一刻的速度刚好相反。（不妨想像把影片倒过来播放。）我们假设平面是光滑（smooth）的，所以它给予质点的冲量（impulse）垂直于平面：沿斜面的分量 $\dot{x}$ 不会因反弹而改变。这个分量要被反转，唯一的可能就是它本身为零。因此质点必须垂直撞击平面，即在 $t = T$ 时 $\dot{x} = 0$。（我们还需要反弹把 $\dot{y}$ 反转而不损失速率，所以碰撞必须是完全弹性（perfectly elastic）的。题目把这一点视为理所当然。）

现在 $\dot{x} = V\cos\theta - gt\sin\phi$，所以由 $\dot{x}(T) = 0$ 得

$$V\cos\theta = gT\sin\phi = \frac{2V\sin\theta\sin\phi}{\cos\phi}.$$

两边除以 $V\cos\theta$（由于 $0 < \theta < \pi/2$，此数为正），

$$2\tan\phi\tan\theta = 1,$$

即为所求。

射程

由 $\dot{x}(T) = 0$ 可得较简洁的形式 $T = \dfrac{V\cos\theta}{g\sin\phi}$。于是

$$\begin{aligned} R = x(T) &= V\cos\theta \cdot \frac{V\cos\theta}{g\sin\phi} - \frac{1}{2}g\sin\phi \cdot \frac{V^2\cos^2\theta}{g^2\sin^2\phi} \\ &= \frac{V^2\cos^2\theta}{g\sin\phi} - \frac{V^2\cos^2\theta}{2g\sin\phi} = \frac{V^2\cos^2\theta}{2g\sin\phi}, \end{aligned}$$

这就是所求的结果。（换一个说法：x 在 $\dot{x} = 0$ 时最大，所以落点就是这个运动沿斜面向上所能到达的最高点。）

关于 $2V^2/(gR)$ 的恒等式

由射程公式，

$$\frac{2V^2}{gR} = \frac{4\sin\phi}{\cos^2\theta} = 4\sin\phi\,(1 + \tan^2\theta).$$

利用 $\tan\theta = \dfrac{1}{2\tan\phi}$，即 $\tan^2\theta = \dfrac{\cos^2\phi}{4\sin^2\phi}$，

$$\frac{2V^2}{gR} = 4\sin\phi + \frac{\cos^2\phi}{\sin\phi} = 4\sin\phi + \frac{1-\sin^2\phi}{\sin\phi} = 3\sin\phi + \operatorname{cosec}\phi.$$

最大射程

对给定的 V，R 在 $3\sin\phi + \operatorname{cosec}\phi$ 最小时最大。设 $s = \sin\phi$；由于 $0 < \phi < \pi/2$，故 $0 < s < 1$。对正数 $3s$ 和 $1/s$ 应用算术平均—几何平均不等式，

$$3s + \frac{1}{s} \geq 2\sqrt{3s \cdot \frac{1}{s}} = 2\sqrt{3},$$

等号成立当且仅当 $3s = 1/s$，即 $s = 1/\sqrt{3}$。这个值确实落在 $(0,1)$ 之内，所以这个界可由一个真实存在的斜面达到。因此

$$\frac{2V^2}{gR} \geq 2\sqrt{3} \quad\Longrightarrow\quad R \leq \frac{V^2}{\sqrt{3}\,g},$$

等号在 $\sin\phi = 1/\sqrt{3}$ 时成立。所以最大可能射程为 $V^2/(\sqrt{3}\,g)$。

> ? **想一想** 在最大值处，条件 $\phi + \theta < \pi/2$ 是否成立?

成立，而且事实上任何时候都成立。由 $\tan\theta\tan\phi = \frac{1}{2}$ 及两角皆为锐角，

$$\tan(\phi+\theta) = \frac{\tan\phi + \tan\theta}{1 - \tan\phi\tan\theta} = 2(\tan\phi + \tan\theta) > 0,$$

而由于 $0 < \phi + \theta < \pi$，这就迫使 $\phi + \theta < \pi/2$。在最大值处，$\sin\phi = 1/\sqrt{3}$ 给出 $\tan\phi = 1/\sqrt{2}$，所以 $\tan\theta = 1/\sqrt{2}$ 亦然：最佳情况是 $\theta = \phi \approx 35.3°$。

验算

- 单位：V^2/g 是长度，与射程应有的量纲相符。
- 极限情况：当 $\phi \to 0$ 时，$\operatorname{cosec}\phi \to \infty$ 而 $R \to 0$。在近乎水平的平面上，要垂直落在平面上，唯一的方法是几乎笔直向上发射，射程自然接近零。当 $\phi \to \pi/2$ 时，平面成为一幅铅垂的墙，$\theta \to 0$，且 $2V^2/(gR) \to 4$，所以 $R \to V^2/(2g)$：这正是质点贴着墙笔直向上抛出所达到的高度。两者都合理。
- 数值验算：取 $g = 9.8$、$V = 10$ 及 $\phi = 0.7$，逐步向前推算运动，落点为 $x \approx 5.8561$，与公式吻合。落地时的速度有 $\dot{x} \approx 0$，把它反转后质点便回到原点。对 ϕ 作网格搜索，在 $V = 1$ 时得最大值 $R \approx 0.05891$，等于 $1/(9.8\sqrt{3})$。

常见错误

- 把重力的两个分量弄反了。沿斜面的分量是 $g\sin\phi$，垂直于斜面的分量是 $g\cos\phi$。可用 $\phi = 0$ 检查。
- 说质点必须“水平地”落下，或在“最高点”落下。正确的条件是它垂直撞击平面，即在倾斜坐标轴中 $\dot{x} = 0$。
- 忘记检查 $\sin\phi = 1/\sqrt{3}$ 能否达到。算术平均—几何平均不等式只给出一个界，只有当等号确实可以成立时，它才是最大值。

STEP 之外

质点能沿原路折返，靠的是牛顿力学的时间可逆性（time-reversibility）。若力只取决于位置，把所有速度反转，系统便会沿着自己的历史倒退回去。选取配合几何形状的坐标轴，而不是惯用的水平和铅垂方向，是你在大学力学中会经常用到的习惯。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对这两个想法都有详细阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。