详细解答

STEP III 2007，第 1 题

纯数学 · 正切和与韦达定理

STEP III 2007，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s3-q1

关键思路

多个角之和的正切，是各个角的正切的对称函数（symmetric function）之比；而多项式的根的对称函数，正正就是韦达定理（Vieta's formulae）以系数表示出来的东西。至于最后一部分，窍门是把那条三角方程化为 $t = \tan\theta$ 的四次方程（quartic）；其系数的对称性便会迫使角之和的正切等于零。

解答

四个角之和的正切

把和拆成 $A + B$，其中 $A = \theta_1 + \theta_2$，$B = \theta_3 + \theta_4$，于是

$$\tan A = \frac{t_1 + t_2}{1 - t_1 t_2}, \qquad \tan B = \frac{t_3 + t_4}{1 - t_3 t_4}.$$

然后，把 $\tan(A + B) = \dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$ 的分子和分母同乘以 $(1 - t_1 t_2)(1 - t_3 t_4)$，得

$$\tan(A + B) = \frac{(t_1 + t_2)(1 - t_3 t_4) + (t_3 + t_4)(1 - t_1 t_2)}{(1 - t_1 t_2)(1 - t_3 t_4) - (t_1 + t_2)(t_3 + t_4)}.$$

分子是 $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 - (t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4)$，而分母是 $1 - t_1 t_2 - t_3 t_4 + t_1 t_2 t_3 t_4 - (t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4)$。以

$$\sigma_1 = \sum t_i, \quad \sigma_2 = \sum_{i<j} t_i t_j, \quad \sigma_3 = \sum_{i<j<k} t_i t_j t_k, \quad \sigma_4 = t_1 t_2 t_3 t_4$$

表示各个初等对称函数（elementary symmetric functions），上式便是

$$\boxed{\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{1 - \sigma_2 + \sigma_4}.}$$

（规律与两个角或三个角的情况相同：奇数次的对称函数正负号交替地放在分子，偶数次的则放在分母。）

以系数表示

若 $t_1, \ldots, t_4$ 是 $at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = 0$ 的根，则 $at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e = a(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3)(t - t_4)$，比较系数（韦达定理）得

$$\sigma_1 = -\frac{b}{a}, \qquad \sigma_2 = \frac{c}{a}, \qquad \sigma_3 = -\frac{d}{a}, \qquad \sigma_4 = \frac{e}{a}.$$

代入后，分子和分母同乘以 $a \neq 0$，得

$$\boxed{\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = \frac{d - b}{a - c + e}.}$$

最后一部分

由于 $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$，方程即为

$$2p\cos^2\theta + \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha = 0.$$

除以 $\cos^2\theta$（我们不理会 $\cos\theta = 0$ 这个特殊情况），得

$$2p = -(\cos\alpha + t\sin\alpha)\sec\theta, \qquad t = \tan\theta.$$

$\sec\theta$ 并不是 t 的有理函数(rational function),所以我们把两边平方,并利用 $\sec^2\theta = 1 + t^2$:

$$4p^2 = (\cos\alpha + t\sin\alpha)^2(1 + t^2).$$

展开后，

$$\sin^2\alpha\, t^4 + 2\sin\alpha\cos\alpha\, t^3 + t^2 + 2\sin\alpha\cos\alpha\, t + (\cos^2\alpha - 4p^2) = 0, \qquad (*)$$

其中 t^2 的系数用了 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$。

想一想 平方可能会引入额外的解。各个 $\tan\theta_i$ 真的就是 $(*)$ 的四个根吗?

平方之后，$p\cos 2\theta - \cos(\theta - \alpha) + p = 0$ 的解也同样满足 $(*)$。不过，把 θ 换成 $\theta + \pi$，$t = \tan\theta$ 和 $\cos^2\theta$ 都保持不变，而 $\cos(\theta - \alpha)$ 则会变号。因此，对于 $(*)$ 的每一个实根 t，在 $[0, 2\pi)$ 内正切等于 t 的两个角之中，恰好有一个满足原来的方程（不会两个都满足，因为那样便需要 $\cos(\theta - \alpha) = 0$，从而 $p\cos^2\theta = 0$，属于特殊情况）。所以，$[0, 2\pi)$ 内的解与 $(*)$ 的实根一一对应（one-to-one correspondence），而题目所给的四个角的正切，正是 $(*)$ 的四个根。

现在应用前面的结果，取 $a = \sin^2\alpha$，$b = d = 2\sin\alpha\cos\alpha$，$c = 1$，$e = \cos^2\alpha - 4p^2$（我们需要 $a \neq 0$，即 $\sin\alpha \neq 0$；否则 $(*)$ 便不是四次方程，这又是一个特殊情况）。分子是 $d - b = 0$，而分母是

$$a - c + e = \sin^2\alpha - 1 + \cos^2\alpha - 4p^2 = -4p^2,$$

它不等于零（若 $p = 0$，方程只是 $\cos(\theta - \alpha) = 0$，只有两个解）。因此

$$\tan(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4) = 0,$$

所以对某个整数 n 有 $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = n\pi$，这正是所要证明的。

验算

- 在四个角的公式中取 $t_3 = t_4 = 0$：公式便简化为 $(t_1 + t_2)/(1 - t_1t_2)$，即我们熟悉的两角公式。
- 取 $p = \frac{1}{2}$ 和 $\alpha = 3$，在 $[0, 2\pi)$ 上以数值方法解方程，得到四个根，它们的和除以 π 后是一个整数，误差在 10^{-9} 以内。（并非每一组 p 和 α 都给出四个解：$p = \frac{1}{2}$、$\alpha = 1$ 便只有两个解。）我们随机试过的每一组 (p, α)，只要给出四个解，结果都一样；我们亦用数以千计的随机角和随机四次方程验证过两条公式。

常见错误

- 韦达定理中的正负号出错：相间的系数 b 和 d 是带负号的。
- 试图不经平方就直接以 $\tan\theta$ 表示 $\cos(\theta - \alpha)$，又或者平方之后没有检查是否混入了不想要的角。

STEP 之外

以初等对称函数表示角之和的 tan，是一条重要定理的其中一个例子：根的每一个对称多项式（symmetric polynomial），都是系数的多项式。这个结果也可以用复数（complex numbers）漂亮地解释，因为 $\prod(1 + \mathrm{i}t_k) = \prod \sec\theta_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\sum\theta_k}$，而它的实部和虚部分别是 $1 - \sigma_2 + \sigma_4$ 和 $\sigma_1 - \sigma_3$。Needham 的 *Visual Complex Analysis* 深入发展了这种几何的思考方式，而 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 则收录了更多同类风格的 STEP 题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。