详细解答

STEP II 2007，第 9 题

力学 · 斜碰撞与恢复系数

STEP II 2007，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s2-q9

关键思路

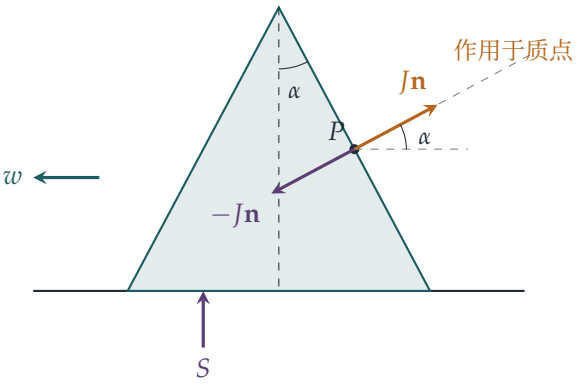
所有接触面都是光滑的（smooth），所以质点与圆锥之间唯一的冲量（impulse）沿碰撞点的公法线（common normal）方向作用，而桌面只能沿铅垂方向施力。由此我们同时得知两件事：质点沿锥面方向的速度不变，而质点与圆锥合起来的水平动量（momentum）守恒。把这些与沿法线方向的牛顿恢复定律（Newton's law of restitution）结合起来，便可求出圆锥的速率。第 (ii) 部分其实就是把第 (i) 部分应用于下落质点速度的法向分量。

解答

把质点视为一点，把圆锥视为刚体（rigid body）；按题目所述，圆锥既不转动，亦不作铅垂方向的运动，所以刚碰撞后它以某速率 w 沿水平方向滑动。我们在通过圆锥的轴和碰撞点 P 的铅垂平面内考虑。由于通过 P 的母线（generator）与铅垂的轴成 α 角，在 P 的向外法线与水平方向成 α 角。取单位向量

$$\mathbf{n} = (\cos\alpha,\ \sin\alpha)\text{（向外法线）}, \qquad \mathbf{t} = (\sin\alpha,\ -\cos\alpha)\text{（沿斜面向下）},$$

其中第一个坐标为水平方向（远离轴），第二个坐标为铅垂向上。



设作用于质点的冲量为 $J\mathbf{n}$（$J > 0$），则圆锥所受的冲量为 $-J\mathbf{n}$，其水平部分的大小为 $J\cos\alpha$，方向远离 P。桌面提供向上的铅垂冲量 $S = J\sin\alpha$，刚好抵消 $-J\mathbf{n}$ 的向下部分；这就是圆锥没有铅垂速度的原因。所以

$$Mw = J\cos\alpha, \tag{1}$$

而圆锥沿水平方向远离 P 运动。

第 (i) 部分

质点到达时的速度为 $-u\mathbf{n}$，它没有沿 $\mathbf{t}$ 方向的分量。由于接触面光滑，作用于质点的冲量完全沿 $\mathbf{n}$ 方向，不能改变质点沿 $\mathbf{t}$ 方向的分量。因此碰撞后该分量仍然是零，质点的速度是 $\mathbf{n}$ 的倍数：它沿 P 处的法线运动（向外运动；又或者，若圆锥退得够快，则仍然向内运动，只是较慢）。

碰撞后质点的速度为 $(-u + J/m)\,\mathbf{n}$。圆锥以速率 w 沿水平方向远离 P 运动（即图中向左），所以它的速度是 $(-w, 0)$，其沿 $\mathbf{n}$ 方向的分量为 $-w\cos\alpha$。

> **想一想** 牛顿恢复定律比较的是沿哪个方向的相对速度？圆锥在当中有甚么贡献？

恢复定律沿公法线 $\mathbf{n}$ 方向起作用。碰撞前，沿 $\mathbf{n}$ 方向的接近速率为 u（圆锥静止）。碰撞后的分离速率，等于质点的 $\mathbf{n}$ 分量减去圆锥的相应分量：

$$\left(-u + \frac{J}{m}\right) - (-w\cos\alpha) = eu \quad\Longrightarrow\quad J = m\big((1+e)u - w\cos\alpha\big).$$

代入 (1)，得

$$Mw = m\cos\alpha\,\big((1+e)u - w\cos\alpha\big) \quad\Longrightarrow\quad \boxed{w = \frac{m(1+e)u\cos\alpha}{M + m\cos^2\alpha}}.$$

换一个说法，水平动量守恒（桌面的冲量是铅垂的）：$m(-u\cos\alpha) = m\big(-u + \frac{J}{m}\big)\cos\alpha - Mw$，这又是 (1)。

第 (ii) 部分

现在质点到达时的速度为 $(0,-u)$。把它分解：

$$(0,-u)\cdot\mathbf{n} = -u\sin\alpha, \qquad (0,-u)\cdot\mathbf{t} = u\cos\alpha.$$

切向部分 $u\cos\alpha$ 不受碰撞影响（同样因为接触面光滑），之后亦再无作用：冲量 $J\mathbf{n}$、方程 (1) 和恢复定律的方程都只涉及法向分量。所以第 (i) 部分的推导完全适用，只需把法向接近速率 u 换成 $u\sin\alpha$：

$$w = \frac{m(1+e)(u\sin\alpha)\cos\alpha}{M+m\cos^2\alpha} = \frac{mu(1+e)\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\cos^2\alpha},$$

正是所求。

对 α 求最大值。固定 M, m, e, u，我们需要在 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ 的范围内求 $f(\alpha)=\dfrac{\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\cos^2\alpha}$ 的最大值。

> ? **想一想** 直接对这个商求导相当繁复。有没有一个代换可以令它变得简洁？

把分子和分母同除以 $\cos^2\alpha$，并设 $T=\tan\alpha>0$，利用 $\sec^2\alpha = 1+T^2$：

$$f = \frac{\tan\alpha}{M\sec^2\alpha+m} = \frac{T}{MT^2+(M+m)} = \frac{1}{MT+\dfrac{M+m}{T}}.$$

根据算术—几何平均不等式（AM–GM inequality）（两项皆为正数），

$$MT+\frac{M+m}{T} \geq 2\sqrt{M(M+m)},$$

等号成立当且仅当 $MT=(M+m)/T$，即 $T^2=(M+m)/M$。所以 f 在该处取得最大值，w 亦然。由于 $T\mapsto\alpha$ 是由 $(0,\infty)$ 到 $(0,\frac{\pi}{2})$ 的双射（bijection），这是唯一的最大值，而且

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\frac{M+m}{M}} = \frac{M}{2M+m}, \qquad \text{所以} \qquad \cos\alpha = \sqrt{\frac{M}{2M+m}}$$

（因为 α 是锐角，故取正根）。最大速率为 $w_{\max} = \dfrac{mu(1+e)}{2\sqrt{M(M+m)}}$。

验算

- 若 $\alpha\to\frac{\pi}{2}$，圆锥变成一块平的圆盘：铅垂下落不会产生水平推力，故 $w\to 0$。在第 (i) 部分中，当 $\alpha\to\frac{\pi}{2}$ 时法线是铅垂的，同样有 $w\to 0$。吻合。
- 在第 (i) 部分中，当 $\alpha\to 0$（一面铅垂的墙）时，我们得到 $w=\dfrac{m(1+e)u}{M+m}$，这正是与一个质量为 M 的自由方块正碰时大家熟悉的答案。

- 若 $m \ll M$，最佳角度满足 $\cos^2\alpha \to \frac{1}{2}$，即 $\alpha = 45°$，这正是 $\sin\alpha\cos\alpha$ 取最大值之处。
- 数值上，取 $M = 3, m = 1, e = \frac{1}{2}, u = 4, \alpha = \frac{\pi}{6}$，第 (ii) 部分给出 $w = \frac{2\sqrt{3}}{5} \approx 0.693$。以随机选取的参数直接计算冲量（由恢复定律解出 J），结果与两条公式都一致；对 α 作网格搜索，亦确认了取得最大值的角度。

常见错误

- 忘记圆锥会移动，写恢复定律的方程时，把分离速率当成只是质点的速率 eu。圆锥的速度沿法线方向有分量 $w\cos\alpha$。
- 沿法线方向应用动量守恒。桌面的冲量沿 $\mathbf{n}$ 方向有分量，所以只有水平动量守恒。
- 以为法线与铅垂方向成 α 角。与铅垂方向成 α 角的是锥面，所以法线是与水平方向成 α 角。

STEP 之外

这里的桌面起着约束（constraint）的作用：它令圆锥失去一个自由度（degree of freedom），而它的冲量则是为了维持这个约束所需的任何值。到了大学，这会发展成冲击约束（impulsive constraints）的理论，在拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）中以广义坐标（generalised coordinates）处理十分简洁；而向法线方向投影的做法，与受约束物体的有效质量（effective mass）背后是同一个想法。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门教科书）对二维的碰撞和冲量有仔细的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。