详细解答

STEP II 2007，第 8 题

纯数学 • 以向量证明塞瓦定理

> **STEP II 2007，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q8

关键思路

平面上每一点都可以写成 $\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$，而第 (i) 部分正好告诉我们这样的点何时位于 BC 上：两个系数之和为 1。因此，要找出一条直线与 BC（或 CA、AB）的交点，我们只需把该直线上的一般点用 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 表示，再对系数加上适当的条件。这样每个比都可以用 β 和 γ 表示，而三者的乘积会全部约简。

解答

在整个解答中，像 $BD:DC$ 这样的比是指有向比（signed ratio）：若 $\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{DC}$，则 $BD/DC=k$；当 D 位于线段 BC 之外时，这个比是负数。由于 A、B、C 不共线（collinear），$\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 互不平行且均非零，所以我们可以比较系数：由 $p\mathbf{b}+q\mathbf{c}=p'\mathbf{b}+q'\mathbf{c}$ 必可得出 $p=p'$ 及 $q=q'$。

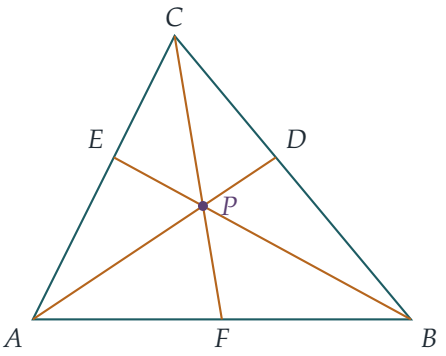
第 (i) 部分

若 $s+t=1$，则

$$s\mathbf{b}+t\mathbf{c}=(1-t)\mathbf{b}+t\mathbf{c}=\mathbf{b}+t(\mathbf{c}-\mathbf{b}),$$

这是通过 B 且方向为 $\overrightarrow{BC}$ 的直线的向量方程（vector equation），其中 t 为参数。当 t 取遍所有实数时，X 走遍整条直线。因此 X 的轨迹（locus）是通过 B 和 C 的（无限延伸的）直线；线段 BC 则是其中 $0\le t\le 1$ 的部分。

反过来，比较系数可知，点 $\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}$ 位于直线 BC 上当且仅当 $\beta+\gamma=1$。这就是我们从现在起使用的判别方法。特别地，$\beta+\gamma\neq 1$ 表示 P 不在 BC 上，而 $\beta,\gamma\neq 0$ 表示 P 不在 CA 或 AB 上。



第 (ii) 部分

直线 AP 上的一般点是 $\lambda(\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}) = \lambda\beta\,\mathbf{b} + \lambda\gamma\,\mathbf{c}$。根据第 (i) 部分，它位于 BC 上正好是当 $\lambda\beta + \lambda\gamma = 1$，即

$$\lambda = \frac{1}{\beta+\gamma}.$$

（这需要 $\beta+\gamma \neq 0$。若 $\beta+\gamma = 0$，则 $\overrightarrow{AP} = \beta(\mathbf{b}-\mathbf{c})$ 与 BC 平行，D 并不存在，所以题目其实隐含了 $\beta+\gamma \neq 0$ 的假设。）因此

$$\mathbf{d} = \frac{\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}}{\beta+\gamma}.$$

现在

$$\overrightarrow{BD} = \mathbf{d}-\mathbf{b} = \frac{\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}-(\beta+\gamma)\mathbf{b}}{\beta+\gamma} = \frac{\gamma}{\beta+\gamma}(\mathbf{c}-\mathbf{b}),$$
$$\overrightarrow{DC} = \mathbf{c}-\mathbf{d} = \frac{(\beta+\gamma)\mathbf{c}-\beta\mathbf{b}-\gamma\mathbf{c}}{\beta+\gamma} = \frac{\beta}{\beta+\gamma}(\mathbf{c}-\mathbf{b}).$$

两者都是同一个向量 $\mathbf{c}-\mathbf{b}$ 的倍数，所以 $\beta\overrightarrow{BD} = \gamma\overrightarrow{DC}$，又因为 $\beta \neq 0$，

$$BD : DC = \gamma : \beta,$$

这正是所需的结果。

第 (iii) 部分

我们用同样的方法求 E 和 F，不过这次的目标直线是 CA（$\mathbf{c}$ 的倍数）和 AB（$\mathbf{b}$ 的倍数）。

> ? **想一想** 怎样判断一点 $p\mathbf{b}+q\mathbf{c}$ 是否在直线 CA 上?

直线 CA 通过原点 A，方向为 $\mathbf{c}$，所以线上的点正好就是 $\mathbf{c}$ 的所有倍数：$\mathbf{b}$ 的系数必须为零。同样地，一点在 AB 上，正好是当它的 $\mathbf{c}$ 系数为零。

求 E。直线 BP 上的一般点是

$$\mathbf{b}+\mu(\beta\mathbf{b}+\gamma\mathbf{c}-\mathbf{b})=(1-\mu(1-\beta))\mathbf{b}+\mu\gamma\,\mathbf{c}.$$

令 $\mathbf{b}$ 的系数为零，得 $\mu=1/(1-\beta)$（我们需要 $\beta\neq 1$；若 $\beta=1$，则 $\overrightarrow{BP}=\gamma\mathbf{c}$ 与 CA 平行，E 并不存在）。所以

$$\mathbf{e}=e\,\mathbf{c},\qquad e=\frac{\gamma}{1-\beta}.$$

于是 $\overrightarrow{CE}=(e-1)\mathbf{c}$ 及 $\overrightarrow{EA}=-e\,\mathbf{c}$，而且因为 $\gamma\neq 0$，所以 $e\neq 0$，因此

$$\frac{CE}{EA}=\frac{e-1}{-e}=\frac{1-e}{e}=\frac{(1-\beta-\gamma)/(1-\beta)}{\gamma/(1-\beta)}=\frac{1-\beta-\gamma}{\gamma}.$$

求 F。把 B 和 C 的角色互换（即 $\mathbf{b}\leftrightarrow\mathbf{c}$ 及 $\beta\leftrightarrow\gamma$），在假设 $\gamma\neq 1$ 之下，直线 CP 与 AB 相交于 $\mathbf{f}=f\,\mathbf{b}$，其中 $f=\beta/(1-\gamma)$。于是 $\overrightarrow{AF}=f\,\mathbf{b}$ 及 $\overrightarrow{FB}=(1-f)\mathbf{b}$，其中 $1-f=(1-\beta-\gamma)/(1-\gamma)\neq 0$，因为 $\beta+\gamma\neq 1$。所以

$$\frac{AF}{FB}=\frac{f}{1-f}=\frac{\beta}{1-\beta-\gamma}.$$

乘积。中间的因子用第 (ii) 部分的结果，得

$$\frac{AF}{FB}\times\frac{BD}{DC}\times\frac{CE}{EA}=\frac{\beta}{1-\beta-\gamma}\times\frac{\gamma}{\beta}\times\frac{1-\beta-\gamma}{\gamma}=1,$$

其中每个被约去的因子都不是零，因为 $\beta\neq 0$、$\gamma\neq 0$ 及 $\beta+\gamma\neq 1$。这就是所需的结果。（它对有向比成立，因此对长度本身也成立。）

验算

- 形心（centroid）：取 $\beta=\gamma=\frac{1}{3}$，P 便是形心。这时 $BD:DC=1:1$、$CE/EA=\frac{1/3}{1/3}=1$ 及 $AF/FB=1$，所以三条塞瓦线（cevian）都是中线（median），正如所料。
- 取 $A=(0,0)$、$B=(4,0)$、$C=(1.5,3)$、$\beta=0.3$、$\gamma=0.4$（即图中的情况），我们得到 $D=(2.571,1.714)$、$E=\frac{4}{7}\mathbf{c}$ 及 $F=(2,0)$，从而 $\frac{AF}{FB}=1$、$\frac{BD}{DC}=\frac{4}{3}$、$\frac{CE}{EA}=\frac{3}{4}$，乘积为 1。
- 我们以超过 1700 个随机三角形和随机的 β,γ（包括 P 在三角形之外的情况），用分数精确地核对了 D、E、F 的公式、全部三个有向比以及乘积。

常见错误

- 把 (i) 中的轨迹说成线段 BC：s 和 t 并没有限定为正数，所以轨迹是整条直线。

- 把比倒转了：$\overrightarrow{BD}$ 与 $\mathbf{c}$ 的系数 γ 成正比，所以 γ 大的时候，D 会被拉向 C。
- 忘记了沿 BP 和 CP 的参数是从 B 和 C 起计，而不是从原点起计。

STEP 之外

第 (iii) 部分就是塞瓦定理（Ceva's theorem），而 $(1-\beta-\gamma, \beta, \gamma)$ 是 P 相对于三角形 ABC 的重心坐标（barycentric coordinates）：它们与三角形 PBC、PCA、PAB 的面积成正比，而那三个比不过是这些面积之间的商。重心坐标是仿射几何（affine geometry）最自然的框架：在仿射几何中，直线以及沿直线的比都有意义，但长度和角度则没有；重心坐标亦会在电脑图像（computer graphics）和有限元法（finite-element method）中再次出现。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）有系统地处理相对于一组基（basis）的坐标，是很好的入门读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。