详细解答

STEP II 2007，第 7 题

纯数学 · 琴生不等式

STEP II 2007，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s2-q7

本题在 *Beyond STEP* 第 3.3 节凸性的威力中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/convexity.html

关键思路

延森不等式（Jensen's inequality）指出：对于凹函数（concave function），函数值的平均不超过平均值处的函数值。每一部分的关键，都在于看出该用哪一个凹函数，以及该对哪些数取平均。就三角形而言，各角之和固定，所以它们的平均值是已知的。至于算术—几何平均不等式（AM–GM inequality），对数（logarithm）能把积化为和。(a) 和 (b) 两部分则需要选对代入 AM–GM 的一组数，当中包括一些常数。

解答

凹性

若 $f(x) = \sin x$，则 $f''(x) = -\sin x$。当 $0 < x < \pi$ 时，$\sin x > 0$，所以 $f''(x) < 0$，故 $\sin x$ 在该区间上是凹的。

若 $f(x) = \ln x$，则 $f'(x) = 1/x$ 及 $f''(x) = -1/x^2$。对所有 $x > 0$，这都是负数，所以 $\ln x$ 在 $x > 0$ 时是凹的。

第 (i) 部分

三角形的各角满足 $A, B, C > 0$ 及 $A + B + C = \pi$，所以每个角都在 $(0, \pi)$ 之内，而 sin 在此区间上是凹的。取 $n = 3$，由延森不等式得

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\left(\frac{A + B + C}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

两边乘以 3，

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3\sqrt{3}}{2},$$

正是所求。等号成立当且仅当 $A = B = C = \pi/3$，即等边三角形。

第 (ii) 部分

取 $f(x) = \ln x$，它在 $x > 0$ 上是凹的，并设 $x_k = t_k > 0$。由延森不等式得

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln t_k \leq \ln\left(\frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n}\right).$$

左边等于 $\frac{1}{n}\ln(t_1 t_2 \cdots t_n) = \ln \sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n}$。由于 e^x 是递增函数，我们可以对两边取指数而不改变不等号的方向：

$$\sqrt[n]{t_1 t_2 \cdots t_n} \leq \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_n}{n},$$

等号成立当且仅当 $t_1 = t_2 = \cdots = t_n$。（当 $n = 1$ 时，这显然是等式，与上述结论一致。）

(a)

? **想一想** 我们应该对哪四个数取平均?

左边有四项，所以取 $n = 4$。我们需要几何平均（geometric mean）得出 xyz，而 x^4, y^4, z^4 给出 $\sqrt[4]{x^4 y^4 z^4} = xyz$。常数 16 就是第四项，而 $\sqrt[4]{16} = 2$。因此取 $t_1 = x^4$，$t_2 = y^4$，$t_3 = z^4$，$t_4 = 16$，全部为正数：

$$\frac{x^4 + y^4 + z^4 + 16}{4} \geq \sqrt[4]{16\, x^4 y^4 z^4} = 2xyz,$$

其中取四次方根时用到 $x, y, z > 0$。两边乘以 4 得

$$x^4 + y^4 + z^4 + 16 \geq 8xyz,$$

正是所求。等号成立需要 $x^4 = y^4 = z^4 = 16$，即 $x = y = z = 2$。

(b) 现在出现的是五次方，所以我们取 $n = 5$，并让 x^5, y^5, z^5 成为其中三个数。要令五次方根恰好得出 xyz，其余两个数的积必须是 1。最自然的选择是 $t_4 = t_5 = 1$：

$$\frac{x^5 + y^5 + z^5 + 1 + 1}{5} \geq \sqrt[5]{x^5 y^5 z^5 \cdot 1 \cdot 1} = xyz.$$

移项整理后，

$$x^5 + y^5 + z^5 - 5xyz \geq -2$$

对所有正数 x, y, z 成立。

想一想 这是否已证明最小值是 -2?

单凭这一点并不足够：下界（lower bound）必须能够取到，才是最小值。AM–GM 的等号在五个数全部相等时成立，即 $x^5 = y^5 = z^5 = 1$，所以 $x = y = z = 1$。此时该式的值为 $1 + 1 + 1 - 5 = -2$。因此最小值是

$$\boxed{-2}, \quad \text{取得于} x = y = z = 1.$$

验算

- 在 (i) 中，等腰直角三角形给出 $1 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2.414$，小于 $3\sqrt{3}/2 \approx 2.598$。随机抽取 200 000 个三角形，结果从未超过 2.598。
- 在 (a) 中，当 $x = y = z = 2$ 时，两边都等于 64。
- 在 (b) 中，从随机起点出发进行数值最小化，结果总是收敛到 $(1, 1, 1)$，其值为 -2。此外，$x = y = z = 1.1$ 给出 $3(1.61051) - 5(1.331) \approx -1.82 > -2$。

常见错误

- 忘记了取指数之所以保持不等号方向，全因 e^x 是递增函数；这一点值得写上一句说明。
- 在 (b) 中，写到“≥ -2”便停笔，没有举出令该式达到 -2 的 x、y、z 的值。
- 对 x^5, y^5, z^5 使用 $n = 3$ 的 AM–GM，这样只会得到 $x^5 + y^5 + z^5 \geq 3(xyz)^{5/3}$，无法与 $5xyz$ 直接比较。

STEP 之外

延森不等式是关于凸（convex）函数或凹函数的命题，它真正的归宿是分析学和概率论：用期望值（expectation）的语言来说，它就是对凹函数 f 有 $\mathrm{E}[f(X)] \leq f(\mathrm{E}[X])$。(a) 和 (b) 中的技巧，即补上常数令几何平均恰好符合所需，正是加权 AM–GM 不等式和赫尔德（Hölder）不等式理论的起点。想进一步了解不等式和凸性，可参阅 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）；至于概率版本，可参阅 Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（概率论入门）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。