详细解答

STEP II 2007，第 6 题

纯数学 · 一阶微分方程

STEP II 2007，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s2-q6

关键思路

第 (i) 部分给出两个函数，它们的导数（derivative）的分母都是 $\sqrt{3+x^2}$；把两者适当地组合起来，所得的导数正好是 $\sqrt{3+x^2}$ 本身的倍数，于是所求的积分（integral）便唾手可得。第 (ii) 部分的微分方程（differential equation）是 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的二次方程。解这个二次方程，便得到两条普通的一阶方程，而每一条所需的正是第 (i) 部分的积分。

解答

第 (i) 部分

设 $s=\sqrt{3+x^2}$，则对任何实数 x 都有 $s>0$，并且 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\dfrac{x}{s}$。另外，由于 $s>|x|$，所以 $x+s>0$，因此该对数对所有 x 都有定义。

根据链式法则（chain rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x+s)=\frac{1+\dfrac{x}{s}}{x+s}=\frac{\dfrac{s+x}{s}}{x+s}=\frac{1}{\sqrt{3+x^2}}.$$

根据积法则（product rule），

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xs)=s+x\cdot\frac{x}{s}=\frac{s^2+x^2}{s}=\frac{3+2x^2}{\sqrt{3+x^2}}.$$

想一想 这两个导数怎样给出 $\int\sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x$?

我们希望分母为 s 而分子为 $3+x^2$，因为 $\dfrac{3+x^2}{s}=s$。第二个导数的分子是 $3+2x^2$；加

上第一个导数的 3 倍，便得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(xs+3\ln(x+s)\Big)=\frac{3+2x^2+3}{s}=\frac{2(3+x^2)}{s}=2\sqrt{3+x^2}.$$

因此

$$\int\sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x=\tfrac{1}{2}x\sqrt{3+x^2}+\tfrac{3}{2}\ln(x+\sqrt{3+x^2}\,)+C.$$

第 (ii) 部分

设 $p=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$。原方程就是 p 的二次方程 $3p^2+2xp-1=0$，所以

$$p=\frac{-2x\pm\sqrt{4x^2+12}}{6}=\frac{-x\pm\sqrt{3+x^2}}{3}.$$

判别式（discriminant）$4x^2+12$ 恒为正数，所以在每一个 x 处都有两个相异实根。两根之差 $\frac{2}{3}\sqrt{3+x^2}$ 永不为零，所以一个解不可能中途由一个根转到另一个根。（导数具有介值性质（intermediate value property），所以它不可能在两个始终相差最少 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ 的值之间跳跃。）因此，每一个解都对所有 x 满足

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{3+x^2}\qquad\text{或}\qquad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{3+x^2}$$

其中之一。利用第 (i) 部分的结果积分，

$$y=-\frac{x^2}{6}\pm\Big(\tfrac{1}{6}x\sqrt{3+x^2}+\tfrac{1}{2}\ln(x+\sqrt{3+x^2}\,)\Big)+C.$$

当 $x=1$ 时，$\sqrt{3+x^2}=2$，而 $\ln(x+\sqrt{3+x^2})=\ln 3$。

取 $+$ 号：由 $y(1)=0$ 得 $0=-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\ln 3+C$，所以 $C=-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\ln 3$。把对数项合并，

$$y=\frac{x\sqrt{3+x^2}-x^2-1}{6}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{3+x^2}}{3}\right).$$

取 $-$ 号：由 $y(1)=0$ 得 $0=-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\ln 3+C$，所以 $C=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln 3$，于是

$$y=\frac{3-x^2-x\sqrt{3+x^2}}{6}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+\sqrt{3+x^2}}{3}\right).$$

这就是通过 $(1,0)$ 的两个解，两者对所有实数 x 都成立。

验算

- 把 $x=1$ 代入每个答案：分式部分是 $\frac{2-1-1}{6}=0$（或 $\frac{3-1-2}{6}=0$），而 $\ln\frac{1+2}{3}=0$。所以两个答案都有 $y(1)=0$。

- p 的两个根之和是 $-\frac{2x}{3}$，所以两个解之和应为 $\frac{1-x^2}{3}$。平方根项和对数项确实互相抵消，剩下的正好是 $\frac{2-2x^2}{6} = \frac{1-x^2}{3}$。
- 数值上，用辛普森法则（Simpson's rule）可得 $\int_{-1}^{2} \sqrt{3+x^2}\,\mathrm{d}x \approx 5.949681$，与第 (i) 部分的公式吻合。用龙格－库塔法（Runge–Kutta）把方程的每一个分支由 $(1,0)$ 逐步计算至 $x = 4$，得 $y \approx 0.584957$ 和 $y \approx -5.584957$，与两条公式吻合。（两者之和是 $-5 = \frac{1-16}{3}$。）

常见错误

- 把 $3p^2 + 2xp = 1$ 当作线性方程处理，或尝试分离变量（separate variables），而不是把它当作 p 的二次方程来解。
- 两个分支共用同一个常数 C。每个符号都需要各自的常数，并由 $y(1) = 0$ 确定。
- 漏掉 $\sqrt{3+x^2}$ 前面的因子 $\frac{1}{3}$，以致使用第 (i) 部分的积分时倍数出错。

STEP 之外

形如 $F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0$ 而对导数并非线性的方程，称为隐式（implicit）方程。通过同一点可以有多个解，方程中 p 的每一个根各对应一个。在两个根重合之处，可能出现奇解（singular solutions），即一族曲线的包络线（envelope），克莱罗方程（Clairaut's equation）便是一例。本题的两个根永不重合，所以恰好有两个解。第 (i) 部分的 $\ln\left(x + \sqrt{3+x^2}\right)$ 等于 $\operatorname{arsinh}(x/\sqrt{3})$ 加上一个常数，而该积分其实就是标准的代换（substitution）$x = \sqrt{3}\sinh u$，只是换了个面貌。Boyce 与 DiPrima 合著的 *Elementary Differential Equations*（初等微分方程教科书）涵盖一阶方程，以及其解的存在性与唯一性（existence and uniqueness）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。