详细解答

STEP II 2007，第 5 题

纯数学 · 迭代函数

> **STEP II 2007，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q5

关键思路

$\dfrac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,x}$ 这个形状，正是 $\tan(A+B)$ 的复角公式（compound-angle formula），其中 $\tan B=\sqrt{3}$，即 $B=\frac{\pi}{3}$。所以 f 的作用不过是把角度加上 $\frac{\pi}{3}$；而 tan 的周期（period）是 π，因此走三步便回到起点。第 (iii) 部分可以用同一招，只是换成 sin 和 $\frac{\pi}{6}$，但当中有个陷阱：$\sqrt{1-t^2}$ 只有在角度位于 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ 之内时才是余弦，而这一点会改变答案。

解答

第 (i) 部分

设 $y=f(x)=\dfrac{x+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,x}$。那么 $f^2(x)=\dfrac{y+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\,y}$，把分子和分母同乘以 $1-\sqrt{3}\,x$，得

$$f^2(x)=\frac{(x+\sqrt{3})+\sqrt{3}(1-\sqrt{3}\,x)}{(1-\sqrt{3}\,x)-\sqrt{3}(x+\sqrt{3})}=\frac{2\sqrt{3}-2x}{-2-2\sqrt{3}\,x}=\frac{x-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\,x}.$$

现在再应用 f 一次，这次取 $y=f^2(x)$，并把分子和分母同乘以 $1+\sqrt{3}\,x$：

$$f^3(x)=\frac{(x-\sqrt{3})+\sqrt{3}(1+\sqrt{3}\,x)}{(1+\sqrt{3}\,x)-\sqrt{3}(x-\sqrt{3})}=\frac{4x}{4}=x.$$

所以 f^3 是恒等映射（identity）。（题目排除的那两个点，正好保证每一步都有定义：$f(x)$ 需要 $x\neq 1/\sqrt{3}$，$f^2(x)$ 需要 $x\neq -1/\sqrt{3}$，而 f 把 $\mathbb{R}\setminus\{\pm 1/\sqrt{3}\}$ 映满到它自身，所以我们可以一直做下去。）

由于 $2007=3\times 669$，

$$f^{2007}(x)=(f^3)^{669}(x)=x.$$

第 (ii) 部分

设 $x = \tan\theta$。对任何使 $\tan\alpha$ 有定义且 $1 - \sqrt{3}\tan\alpha \neq 0$ 的角 α，利用 $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ 和复角公式可得

$$f(\tan\alpha) = \frac{\tan\alpha + \tan\frac{\pi}{3}}{1 - \tan\alpha\tan\frac{\pi}{3}} = \tan(\alpha + \tfrac{\pi}{3}).$$

取 $\alpha = \theta$，这就是 $n = 1$ 的情况。若 $f^k(x) = \tan(\theta + \frac{1}{3}k\pi)$，则以 $\alpha = \theta + \frac{1}{3}k\pi$ 代入上述公式，得

$$f^{k+1}(x) = f(\tan(\theta + \tfrac{1}{3}k\pi)) = \tan(\theta + \tfrac{1}{3}(k+1)\pi),$$

所以根据归纳法（induction），对每个正整数 n 都有 $f^n(x) = \tan(\theta + \frac{1}{3}n\pi)$。

整个过程不会出问题：公式只会在某个角 $\theta + \frac{1}{3}k\pi$ 与 $\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{\pi}{6}$ 模（modulo）π 同余时失效，而这会迫使 $\theta = \pm\frac{\pi}{6}$ 或 $\pm\frac{\pi}{2}$，即 $x = \pm 1/\sqrt{3}$ 或 x 为无穷大，这些情况都已被排除。这也解释了第 (i) 部分：加三次 $\frac{\pi}{3}$ 就是加上 π，即 tan 的周期。

第 (iii) 部分

由于 $|t| \leq 1$，我们可以写 $t = \sin\varphi$，其中 $\varphi = \arcsin t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。

想一想 $\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$ 是否总是等于 $\cos\alpha$?

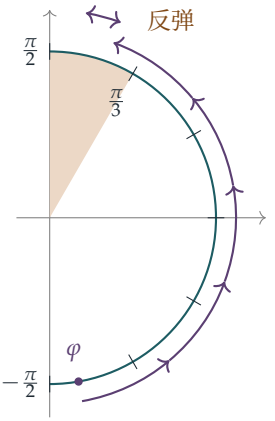
只有当 $\cos\alpha \geq 0$ 时才是。对于角 $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，这没有问题，所以

$$g(\sin\alpha) = \cos\tfrac{\pi}{6}\sin\alpha + \sin\tfrac{\pi}{6}\cos\alpha = \sin(\alpha + \tfrac{\pi}{6}). \qquad (*)$$

要再次应用 $(*)$，我们必须把结果改写成 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 内某个角的 sin。这里分两种情况。

- 若 $\alpha \leq \frac{\pi}{3}$，则 $\alpha + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2}$ 已经在范围之内。
- 若 $\frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$，则 $\alpha + \frac{\pi}{6}$ 可能会超过 $\frac{\pi}{2}$，但 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \sin\big(\pi - \alpha - \frac{\pi}{6}\big) = \sin\big(\frac{5\pi}{6} - \alpha\big)$，而且 $\frac{5\pi}{6} - \alpha \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$。

（当 $\alpha = \frac{\pi}{3}$ 时，两者都给出 $\frac{\pi}{2}$。）所以这个范围内的角每次上升 $\frac{\pi}{6}$，直至进入 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$；此后它便按 $\alpha \mapsto \frac{5\pi}{6} - \alpha$ 被反射，而再反射一次就会还原：这个角在两个值之间来回反弹。



每应用一次 g，角就沿单位圆的右半边移动 $\frac{\pi}{6}$；一旦进入阴影区域 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$，它便来回翻转。

现在设 m 为所需的上升次数，即满足 $\varphi + \frac{m\pi}{6} \geq \frac{\pi}{3}$ 的最小整数 $m \geq 0$。由于 $\varphi \geq -\frac{\pi}{2}$，故 $m \leq 5$；以 t 表示则为：

t	$[\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$	$[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$	$[0, \frac{1}{2})$	$[-\frac{1}{2}, 0)$	$[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$	$[-1, -\frac{\sqrt{3}}{2})$
m	0	1	2	3	4	5

写 $g^n(t) = \sin\varphi_n$，其中 $\varphi_n \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$，且 $\varphi_0 = \varphi$。当 $n \leq m$ 时，之前的每个角都小于 $\frac{\pi}{3}$，所以 $\varphi_n = \varphi + \frac{n\pi}{6}$。于是 $\varphi_m \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$，所以 $\varphi_{m+1} = \frac{5\pi}{6} - \varphi_m$，$\varphi_{m+2} = \varphi_m$，如此类推，交替出现。由于 $\sin\varphi_{m+1} = \sin(\varphi_m + \frac{\pi}{6}) = \sin(\varphi + \frac{(m+1)\pi}{6})$，我们得到（其中 $\varphi = \arcsin t$，m 取自上表）

$$g^n(t) = \begin{cases} \sin(\varphi + \frac{n\pi}{6}), & n \leq m+1, \\ \sin(\varphi + \frac{m\pi}{6}), & n > m+1,\ n-m \text{ 为偶数}, \\ \sin(\varphi + \frac{(m+1)\pi}{6}), & n > m+1,\ n-m \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

特别地，对每个 t 和每个 $n \geq 5$，都有 $g^{n+2}(t) = g^n(t)$。

例如，$t = 0$ 时 $\varphi = 0$，$m = 2$，其轨道（orbit）为 $0 \mapsto \frac{1}{2} \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto 1 \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2} \mapsto 1 \mapsto \cdots$。

验算

- 取 $x = 1$：$f(1) = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = -2-\sqrt{3}$，$f^2(1) = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-2$，且 $f(\sqrt{3}-2) = 1$，与 $\tan\frac{\pi}{4}$、$\tan\frac{7\pi}{12}$、$\tan\frac{11\pi}{12}$ 相符。
- 直接计算，$g(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ 及 $g(1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$：反弹确实存在。想当然地猜 $g^5(0)$ 等于 $\sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$ 是错的；逐次迭代得到的是 1。

- 数值上，从 5000 个随机的 $t \in [-1,1]$ 出发，把 g 迭代十九次，结果与方框内的公式相差不超过 2×10^{-12}。

常见错误

- 在 (iii) 中对所有 n 都答 $\sin(\varphi + \frac{n\pi}{6})$。这忽略了 $\sqrt{1-t^2} \geq 0$，所以角永远不能越过 $\frac{\pi}{2}$。
- 计算 f^2 时的运算失误：应先把分子和分母同乘以 $1 - \sqrt{3}\,x$，然后才化简。

STEP 之外

形如 $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ 的映射称为莫比乌斯变换（Möbius transformation），而把两个这样的变换复合，就相当于把它们的矩阵 $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ 相乘。这里 f 的矩阵是 $2\left(\begin{smallmatrix} \cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{5} \\ -\sin\frac{\pi}{3} & \cos\frac{\pi}{5} \end{smallmatrix}\right)$，即一个经缩放、转角为 $\frac{\pi}{3}$ 的旋转，它的三次方是单位矩阵的倍数，这就是 $f^3(x) = x$ 的原因。第 (iii) 部分让我们浅尝动力系统（dynamical systems）的滋味：那些点是最终周期（eventually periodic）的，而不是周期的。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（以几何直观讲解复分析的著作）对莫比乌斯变换有十分优美的几何处理。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。