详细解答

STEP II 2007，第 4 题

纯数学 · 三角方程

STEP II 2007，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s2-q4

关键思路

用复角公式（compound-angle formulae）把所有项展开，再除以 $\cos A \cos B$：方程便化成关于 $t = \tan A$ 和 $u = \tan B$ 的关系式，其中有一个 tu 项、一个 t 项、一个 u 项和一个常数项。这样的式子能因式分解（factorise）成两个一次括号之积，当且仅当“配成矩形”之后没有余项，而这个余项原来是 $\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2$ 的倍数。其后三条方程都有 $\alpha = 2$, $\beta = \sqrt{3}$, $\gamma = 1$，它们满足这个条件；唯一要做的工夫就是正确地选取 A 和 B。

解答

因式分解

由复角公式，

$$\begin{aligned}&\alpha \sin(A - B) + \beta \cos(A + B) - \gamma \sin(A + B)\\ &\quad = \alpha(\sin A \cos B - \cos A \sin B) + \beta(\cos A \cos B - \sin A \sin B)\\ &\qquad - \gamma(\sin A \cos B + \cos A \sin B).\end{aligned}$$

由于 $\cos A \cos B \neq 0$, 我们可以除以它。记 $t = \tan A$, $u = \tan B$, 则方程等价于 $P(t, u) = 0$, 其中

$$P(t, u) = \alpha(t - u) + \beta(1 - tu) - \gamma(t + u) = -\beta tu + (\alpha - \gamma)t - (\alpha + \gamma)u + \beta.$$

由于 $\beta \neq 0$，设

$$m = -\frac{\alpha + \gamma}{\beta}, \qquad n = \frac{\alpha - \gamma}{\beta}.$$

于是 $-\beta(t-m)(u-n) = -\beta tu + \beta n\,t + \beta m\,u - \beta mn = -\beta tu + (\alpha-\gamma)t - (\alpha+\gamma)u + \dfrac{\alpha^2-\gamma^2}{\beta}$，除常数项外与 P 完全吻合。因此，对所有 t 和 u，

$$P(t,u) = -\beta(t-m)(u-n) + \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{\beta}. \qquad (*)$$

充分性。当 $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ 时，$(*)$ 中的常数项为零，所以（因为 $\beta \neq 0$）方程就是 $(\tan A - m)(\tan B - n) = 0$，其中 m 和 n 只取决于 α, β, γ。

必要性。假设方程可化为 $(t-m')(u-n') = 0$，其中 m', n' 为常数，即 $P(t,u) = 0$ 成立当且仅当 $t = m'$ 或 $u = n'$。记 $c = (\beta^2+\gamma^2-\alpha^2)/\beta$，并假设 $c \neq 0$。这时每一对 (m', u) 都是解，所以 $P(m', u) = -\beta(m'-m)(u-n) + c$ 对每个 u 都等于零。若 $m' \neq m$，这是 u 的一个非常数线性函数（linear function），不会恒等于零；若 $m' = m$，它等于 $c \neq 0$，永不为零。无论哪种情况都得出矛盾，所以 $c = 0$，即 $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$。（若把“可化为”理解成“$P$ 是 $(t-m)(u-n)$ 的常数倍”，比较 tu 的系数便知这个倍数必为 $-\beta$，然后 $(*)$ 同样迫使 $c = 0$。）

想一想 在下面各部分中，如果 $\cos x = 0$，即我们不能作除法的时候，会发生甚么事?

把 $(*)$ 两边乘回 $\cos A \cos B$。当 $\alpha^2 = \beta^2+\gamma^2$ 时，我们得到

$$\alpha\sin(A-B) + \beta\cos(A+B) - \gamma\sin(A+B) = -\beta(\sin A - m\cos A)(\sin B - n\cos B), \qquad (**)$$

这时两边都只是正弦和余弦的组合，所以这个恒等式（identity）对所有 A 和 B 都成立（两边都是连续的，而且只要 $\cos A\cos B \neq 0$ 便相等）。使用 $(**)$，我们就毋须另外处理 $\cos A = 0$ 的情况。

在全部三个部分中，$\alpha = 2, \beta = \sqrt{3}, \gamma = 1$，而 $\alpha^2 = 4 = \beta^2+\gamma^2$。所以

$$m = -\frac{3}{\sqrt{3}} = -\sqrt{3}, \qquad n = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

方程就是 $(\sin A + \sqrt{3}\cos A)(\sin B - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos B) = 0$。留意 $\sin A + \sqrt{3}\cos A = 0$ 必然令 $\cos A \neq 0$（否则 $\sin A = 0$ 亦成立），所以它等同于 $\tan A = -\sqrt{3}$；同样地，第二个括号为零当且仅当 $\tan B = \frac{1}{\sqrt{3}}$。

第 (i) 部分

取 $A = x$ 及 $B = \frac{1}{4}\pi$，使得 $A - B = x - \frac{1}{4}\pi$ 及 $A + B = x + \frac{1}{4}\pi$。由于 $\tan\frac{1}{4}\pi = 1 \neq \frac{1}{\sqrt{3}}$，第二个括号不为零，所以我们需要 $\tan x = -\sqrt{3}$:

$$x = \tfrac{2}{3}\pi \quad 或 \quad x = \tfrac{5}{3}\pi.$$

第 (ii) 部分

现在 $A = x$ 及 $B = \frac{1}{6}\pi$。但 $\tan\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} = n$，所以第二个括号是 $\sin\frac{1}{6}\pi - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$。由 $(**)$，左方减右方恒等于零：这条方程是一个恒等式，每一个满足 $0 \le x < 2\pi$ 的 x 都是解。

第 (iii) 部分

我们需要 $A - B = x + \frac{1}{3}\pi$ 及 $A + B = 3x$。两式相加和相减，得

$$A = 2x + \tfrac{1}{6}\pi, \qquad B = x - \tfrac{1}{6}\pi.$$

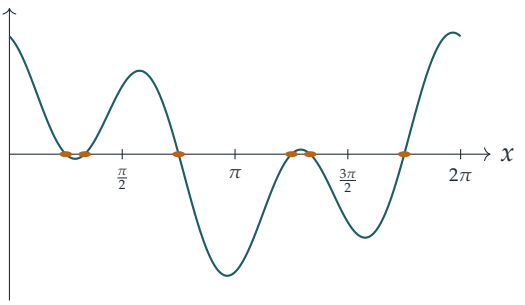
所以解由 $\tan(2x + \frac{1}{6}\pi) = -\sqrt{3}$ 或 $\tan(x - \frac{1}{6}\pi) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 给出。

对于前者，$2x + \frac{1}{6}\pi = \frac{2}{3}\pi + k\pi$，所以 $x = \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}k\pi$，其中 k 为整数。在 $[0, 2\pi)$ 内，这给出 $x = \frac{1}{4}\pi,\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$。

对于后者，$x - \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{6}\pi + k\pi$，所以 $x = \frac{1}{3}\pi + k\pi$，给出 $x = \frac{1}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$。

这六个值互不相同，所以解为

$$x = \tfrac{1}{4}\pi,\ \tfrac{1}{3}\pi,\ \tfrac{3}{4}\pi,\ \tfrac{5}{4}\pi,\ \tfrac{4}{3}\pi,\ \tfrac{7}{4}\pi.$$



(iii) 的左方减右方的图像，恰好在标示的六个点穿过零。

验算

- 在 (i) 中，当 $x = \frac{2}{3}\pi$ 时：$2\sin\frac{5}{12}\pi \approx 1.932$，$\sqrt{3}\cos\frac{11}{12}\pi \approx -1.673$，而 $\sin\frac{11}{12}\pi \approx 0.259$；的确 $1.932 - 1.673 = 0.259$。
- 在 (ii) 中，试 $x = 0$：$2\sin(-\frac{1}{6}\pi) + \sqrt{3}\cos\frac{1}{6}\pi = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} = \sin\frac{1}{6}\pi$。其他任何 x 也同样成立。
- 在 (iii) 中，当 $x = \frac{1}{4}\pi$ 时：$2\sin\frac{7}{12}\pi \approx 1.932$，而 $\sin\frac{3}{4}\pi - \sqrt{3}\cos\frac{3}{4}\pi \approx 0.707 + 1.225 = 1.932$。在 $[0, 2\pi)$ 上以数值方法搜索根，找到的正好是上述六个根。

常见错误

- 在 (iii) 中取 $A = x + \frac{1}{3}\pi$，并由 $3x$ 得出 B：你必须联立求解 $A - B = x + \frac{1}{3}\pi$, $A + B = 3x$。
- 在 (iii) 中只取到 $k = 0, 1$ 便停下而漏掉解：$\tan(2x + \frac{1}{6}\pi)$ 的周期是 $\frac{1}{2}\pi$，所以该括号给出四个解。
- 没有察觉 (ii) 是恒等式，反而去找个别的解。

STEP 之外

式子 $-\beta tu + (\alpha - \gamma)t - (\alpha + \gamma)u + \beta$ 是圆锥曲线（conic）的一种退化情况：它的零点集是一条等轴双曲线（rectangular hyperbola），除非某个类似行列式（determinant）的量为零，这时它便分裂成两条直线。判断一个二次型（quadratic form）何时可以因式分解，是用矩阵和特征值（eigenvalues）为圆锥曲线分类的第一步，这是大学一年级线性代数（linear algebra）的课题；见 Strang, *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门教科书）。Siklos, *Advanced Problems in Mathematics*（进阶数学难题集）中有更多同类风格的三角方程。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。