详细解答

STEP II 2007，第 3 题

纯数学 · 代换积分法

STEP II 2007，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s2-q3

关键思路

一切都建基于 $1/(a^2+x^2)$ 的标准积分（standard integral），所以整道题的重点，就是在代换（substitution）之后认出这个形状。在 (i)(a) 中，分子（numerator）$\cos x$ 正是 $\sin x$ 的导数（derivative），这是个很强的提示。在 (i)(b) 中，半角代换（half-angle substitution）把 $1+\sin^2 x$ 变成 t 的四次式（quartic），而关键在于看出同样的做法可以倒过来用：在 (ii) 中，我们要找出哪一个三角积分会产生新的四次式。

解答

标准积分

设 $a \neq 0$，并取 $x = a\tan\theta$，其中 $-\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi$。当 θ 走遍这个区间时，x 恰好取遍每个实数一次（不论 a 的正负），所以这个代换是有效的，而且由 $\tan\theta = x/a$ 可得 $\theta = \arctan(x/a)$。现在 $\mathrm{d}x = a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$，而

$$a^2 + x^2 = a^2(1+\tan^2\theta) = a^2\sec^2\theta,$$

所以

$$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int \frac{1}{a}\,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{a} + \text{常数} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + \text{常数},$$

这正是所要证明的结果。

第 (i)(a) 部分

代入 $u = \sin x$，则 $\mathrm{d}u = \cos x \,\mathrm{d}x$，而当 x 由 0 变到 $\frac{1}{2}\pi$ 时，u 由 0 变到 1。利用标准积分并取 $a = 1$，

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \Big[\arctan u\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

第 (i)(b) 部分

取 $t = \tan\frac{1}{2}x$，便有以下标准的半角结果

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

最后一式是因为 $\mathrm{d}t/\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(1+t^2)$。积分上下限（limits）$x = 0$ 和 $x = \frac{1}{2}\pi$ 分别变成 $t = 0$ 和 $t = \tan\frac{1}{4}\pi = 1$。接着，

$$1 + \sin^2 x = \frac{(1+t^2)^2 + 4t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+6t^2+t^4}{(1+t^2)^2}.$$

把各部分合起来，$1+t^2$ 的因子完全约去：

$$I = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\cdot\frac{(1+t^2)^2}{1+6t^2+t^4}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+6t^2+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

两边除以 2，便得 $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+6t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}I$，这正是所要证明的结果。（由 (i)(a)，它的值是 $\pi/8$。）

第 (ii) 部分

> **想一想** 四次式 $1+14t^2+t^4$ 可能是从哪里来的?

在 (i)(b) 中，$6t^2$ 的来源是：把 $1+t^2$ 平方得到的 $2t^2$，再加上由 $\sin^2 x$ 得到的 $4t^2 = (2t)^2$。要得到 $14t^2$，我们需要额外的 $12t^2 = 3(2t)^2$，也就是以 $3\sin^2 x$ 取代 $\sin^2 x$。事实上，取 $t = \tan\frac{1}{2}x$，

$$1 + 3\sin^2 x = \frac{(1+t^2)^2 + 12t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{1+14t^2+t^4}{(1+t^2)^2}.$$

因此，把 (i)(b) 的计算原封不动地重做一次，只是以 $1+3\sin^2 x$ 取代 $1+\sin^2 x$，便得

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\cos x}{1+3\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+14t^2+t^4}\,\mathrm{d}t.$$

仿照 (i)(a)，用 $u = \sin x$ 计算左边：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+3u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{1}{\frac{1}{3}+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}\Big[\arctan\left(\sqrt{3}\,u\right)\Big]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\pi}{3},$$

这里用了标准积分，并取 $a = 1/\sqrt{3}$。取其一半，

$$\int_0^1 \frac{1-t^2}{1+14t^2+t^4}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\,\pi}{18}.$$

验算

用辛普森法则（Simpson's rule）可得 $I \approx 0.785398$（即 $\pi/4$），(i)(b) 的积分 ≈ 0.392699（即 $\pi/8$），而 (ii) 的积分 ≈ 0.302300，与 $\sqrt{3}\,\pi/18 \approx 0.302300$ 吻合。再做一个简单的合理性检查：两个四次式的被积函数（integrand）在 $t = 0$ 时都等于 1，在 $t = 1$ 时都等于 0，而分母含 $14t^2$ 的那个在整个区间上都较小，所以它的积分应该小于 $\pi/8 \approx 0.393$，事实也确是如此。

常见错误

- 忘记了来自 $\mathrm{d}x$ 的因子 $\frac{2}{1+t^2}$，以致漏掉 (i)(b) 中的因子 2。
- 写成 $\int \frac{\mathrm{d}u}{1+3u^2} = \arctan(\sqrt{3}u)$ 而漏掉因子 $\frac{1}{\sqrt{3}}$；应先把 3 提出来，或者代入 $v = \sqrt{3}u$。
- 代换之后仍然沿用 x 的上下限：$x = \frac{1}{2}\pi$ 对应的是 $t = 1$。

STEP 之外

还有一条直接的路径：把分子和分母同时除以 t^2，再取 $v = t + 1/t$，便可把 $\frac{1-t^2}{1+kt^2+t^4}$ 变成 $-\frac{1}{v^2+k-2}$，这又是一个 arctan 积分。这里带出的一般道理是：$\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理函数（rational function），在代换 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 之下总会变成 t 的有理函数，因而原则上总是可以积分的；这正是以初等函数表示积分的系统理论的起点。想做更多同类风格的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。