详细解答

STEP II 2007，第 2 题

纯数学 · 三次曲线与面积

STEP II 2007，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s2-q2

关键思路

三次曲线（cubic）转向点（turning point）的一切资料，都藏在它的导数（derivative）里。由于转向点位于 $x = p$ 和 $x = q$，导数必定是 $(x-p)(x-q)$ 的倍数，比较系数（comparing coefficients）便立即得出 b 和 c。之后，求 $m - n$ 最简洁的方法，是把导数在两个转向点之间积分（integrate）；而只要留意到 $y - n$ 在 $x = q$ 处有一个二重根（double root），面积也就容易计算了。

解答

第 (i) 部分

求导，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 6x^2 - 2bx + c.$$

这个二次式在转向点 $x = p$ 和 $x = q$ 处等于零，而它的首项系数是 6，所以

$$6x^2 - 2bx + c = 6(x-p)(x-q) = 6x^2 - 6(p+q)x + 6pq.$$

比较系数，得

$$b = 3(p+q), \qquad c = 6pq.$$

以下两项事实稍后会用到。第一，由于 x^3 的系数为正，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 6(x-p)(x-q)$ 在两根之外为正，在两根之间为负，所以曲线先升、后降、再升：极大点（maximum）在先，故 $p < q$。

第二，条件 $n > 0$ 对 q 有所限制。代入 $x = q$，

$$n = 2q^3 - 3(p+q)q^2 + 6pq^2 = q^2(3p - q),$$

所以 $n > 0$ 即 $q < 3p$。综合起来，$0 < p < q < 3p$。

第 (ii) 部分

曲线通过原点，而且

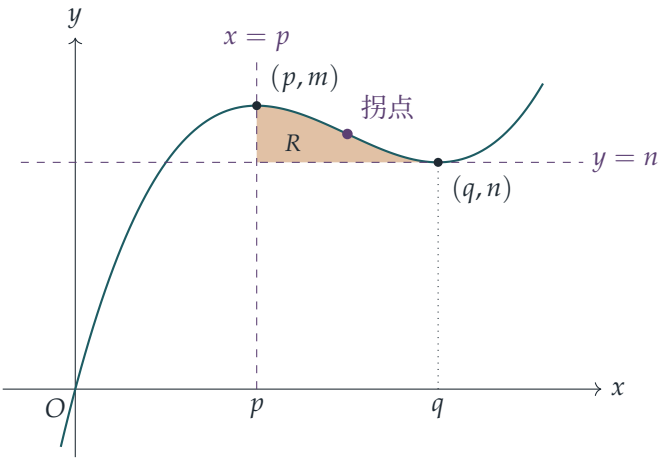
$$y = x(2x^2 - bx + c),$$

其中二次因式的判别式（discriminant）为

$$b^2 - 8c = 9(p+q)^2 - 48pq = 3(3p-q)(p-3q).$$

由于 $q < 3p$ 及 $p < q < 3q$，第一个括号为正，第二个括号为负，所以判别式为负，原点是曲线与 x 轴唯一的交点。因此曲线由 $-\infty$ 向上而来，在 O 穿过横轴，升至极大点 (p, m)，再降至极小点（minimum）(q, n)（此时仍在横轴上方），然后一直上升。

拐点（point of inflection）位于 $\mathrm{d}^2y/\mathrm{d}x^2 = 12x - 2b = 0$ 之处，即 $x = \frac{b}{6} = \frac{1}{2}(p+q)$，正好在两个转向点的正中间。



区域 R（阴影部分）位于 $x = p$ 与 $x = q$ 之间，在曲线之下、直线 $y = n$ 之上；曲线在极小点处与 $y = n$ 相切。

对称性。设 $s = \frac{1}{2}(p+q)$, $h = q - p$，并令 $x = s + t$，即从拐点起量度。于是 $x - p = t + \frac{1}{2}h$ 及 $x - q = t - \frac{1}{2}h$，所以

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 6\left(t^2 - \tfrac{1}{4}h^2\right),$$

这是 t 的偶函数（even function）。因此它由 0 起的积分，即 $y - y(s) = 2t^3 - \frac{3}{2}h^2t$，是 t 的奇函数（odd function）。所以 $y(s+t) - y(s) = -\big(y(s-t) - y(s)\big)$：曲线具有绕其拐点的 2 阶旋转对称（*rotational symmetry*）（绕该点旋转半周，曲线与自身重合）。特别地，这个半周旋转把两个转向点互换，所以拐点是 (p, m) 与 (q, n) 的中点，即 $\left(\frac{1}{2}(p+q), \frac{1}{2}(m+n)\right)$。

第 (iii) 部分

由极大点到极小点的落差，就是斜率的积分：

$$m-n=y(p)-y(q)=-\int_p^q 6(x-p)(x-q)\,\mathrm{d}x.$$

> **想一想** 有没有不必展开就能快速计算 $\int_p^q (x-p)(x-q)\,\mathrm{d}x$ 的方法？

代入 $x=p+u$，于是 $x-q=u-h$，其中 $h=q-p$，而 u 由 0 变到 h：

$$\int_0^h u(u-h)\,\mathrm{d}u=\frac{h^3}{3}-\frac{h^3}{2}=-\frac{h^3}{6}.$$

因此

$$m-n=-6\Big(-\frac{(q-p)^3}{6}\Big)=(q-p)^3,$$

正如所求。

第 (iv) 部分

在 $p\le x\le q$ 上，曲线由 m 递减至 n，所以它位于 $y=n$ 之上或与之相接，而

$$\text{区域面积}R=\int_p^q (y-n)\,\mathrm{d}x.$$

三次式 $y-n=2x^3-bx^2+cx-n$ 在 $x=q$ 处等于零，其导数在该处亦等于零，所以 $x=q$ 是二重根，并且

$$y-n=2(x-q)^2(x-r)$$

对某个 r 成立。比较 x^2 的系数，$-2(2q+r)=-b=-3(p+q)$，所以 $r=\frac{1}{2}(3p-q)$。同样设 $h=q-p$，并令 $u=x-q$（由 $-h$ 变到 0），

$$x-r=u+q-\tfrac{1}{2}(3p-q)=u+\tfrac{3}{2}h.$$

因此

$$\begin{aligned}\text{区域面积}R&=\int_{-h}^0 2u^2\big(u+\tfrac{3}{2}h\big)\,\mathrm{d}u=\Big[\tfrac{1}{2}u^4+hu^3\Big]_{-h}^0\\&=-\big(\tfrac{1}{2}h^4-h^4\big)=\tfrac{1}{2}h^4=\tfrac{1}{2}(q-p)^4,\end{aligned}$$

这就是所求的结果。

验算

取 $p=1$，$q=2$（符合条件，因为 $q<3p$）。于是 $b=9$，$c=12$，而 $y=2x^3-9x^2+12x$ 满足 $y'=6(x-1)(x-2)$，且 $m=y(1)=5$ 及 $n=y(2)=4>0$。所以 $m-n=1=$

$(q-p)^3$。拐点是 (1.5, 4.5)，即两个转向点的中点；把 $y-4$ 在 $[1,2]$ 上作数值积分，得 $0.5000 = \frac{1}{2}(q-p)^4$。我们亦以 2000 对满足 $0 < p < q < 3p$ 的随机数值验证了全部四个结果。

常见错误

- 取 $q < p$：三次项系数为正时，极大点必定在极小点的左边。
- 积分时用了 y 而不是 $y-n$，这样会多算了直线 $y = n$ 之下、高度为 n 的长方形。
- 把对称性说成是对直线 $x = \frac{1}{2}(p+q)$ 的反射；三次曲线具有的是绕一点的半周旋转对称，而不是镜像对称。

STEP 之外

每一条三次曲线都绕其拐点成半周旋转对称，因为平移 x 以消去 x^2 项（即卡尔达诺（Cardano）公式中所用的“缺项三次式”（depressed cubic）代换）之后，余下的是一个奇函数加一个常数。第 (iv) 部分的二重根技巧，是相切与根的重数（multiplicity）理论的起点，这套理论在代数几何（algebraic geometry）中占有核心地位。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics* 载有更多同类风格的题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。