详细解答

STEP II 2007，第 12 题

概率与统计 · 几何分布的最大值

STEP II 2007，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s2-q12

关键思路

先撇开题目对程序那段颇为繁琐的描述，逐颗骰子单独来看。每颗骰子都一直掷到首次出现六点为止，而整个实验在两颗骰子中较慢的那一颗掷出六点时结束。因此，掷骰次数就是两个独立（independent）几何随机变量（geometric random variable）的最大值，而处理最大值最方便的途径，是考虑累积概率（cumulative probability）$\mathrm{P}(\max \le r)$。

解答

第 (i) 部分

设 X 为第一颗骰子首次出现六点时的掷骰次序，并以同样方式为第二颗骰子定义 Y。骰子的每一次投掷都与其他各次投掷独立，所以 X 与 Y 独立，而且两者都服从几何分布：

$$\mathrm{P}(X = k) = q^{k-1}p, \qquad \mathrm{P}(X \le r) = 1 - \mathrm{P}(\text{首 } r \text{ 次投掷全非六点}) = 1 - q^r.$$

题目的程序怎样与此吻合？当两颗骰子都未出现过六点时，我们两颗一起掷；一旦其中一颗出现了六点，便只继续掷另一颗。无论哪种情况，每颗骰子都恰好掷到它首次出现六点为止（之后不再掷），而当两颗都出现过六点，我们便立即停止。如果两颗骰子在同一次投掷中首次出现六点，那就是两颗同时掷出六点的情况。因此掷骰次数为

$$N = \max(X, Y).$$

? **想一想** 为甚么要处理 $\mathrm{P}(N \le r)$，而不直接处理 $\mathrm{P}(N = r)$？

事件 $N \le r$ 就是“$X \le r$ 而且 $Y \le r$”，而独立性可把它化为乘积。事件 $N = r$ 则要分成几种麻烦的情况（一颗骰子在第 r 次完成而另一颗较早完成，或两颗都在第 r 次完成）。

所以

$$\mathrm{P}(N \le r) = \mathrm{P}(X \le r)\,\mathrm{P}(Y \le r) = (1-q^r)^2,$$

而对于 $r \ge 1$，

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N = r) &= \mathrm{P}(N \le r) - \mathrm{P}(N \le r-1) \\
&= (1-q^r)^2 - (1-q^{r-1})^2 \\
&= \left[(1-q^r) - (1-q^{r-1})\right]\left[(1-q^r) + (1-q^{r-1})\right] \\
&= (q^{r-1} - q^r)(2 - q^{r-1} - q^r) \\
&= pq^{r-1}\,(2 - q^{r-1} - q^r),
\end{aligned}$$

当中先用了平方差（difference of two squares），再用了 $q^{r-1} - q^r = q^{r-1}(1-q) = pq^{r-1}$。这就是所要求的结果。

至于期望值（expectation），把这个概率拆成两部分：

$$\mathrm{P}(N = r) = 2pq^{r-1} - pq^{2r-2}(1+q).$$

把题目给出的结果求导（或把它除以 x），可得对于 $|x| < 1$ 有 $\sum_{r\ge1} rx^{r-1} = (1-x)^{-2}$。分别取 $x = q$ 和 $x = q^2$ 代入（当 $0 < p \le 1$ 时两者都小于 1）：

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(N) &= 2p\sum_{r=1}^{\infty} rq^{r-1} - p(1+q)\sum_{r=1}^{\infty} r(q^2)^{r-1} \\
&= \frac{2p}{(1-q)^2} - \frac{p(1+q)}{(1-q^2)^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{p(1+q)}{p^2(1+q)^2} \\
&= \frac{2}{p} - \frac{1}{p(1+q)} \\
&= \frac{1+2q}{p(1+q)},
\end{aligned}$$

其中用了 $1-q = p$ 和 $1-q^2 = (1-q)(1+q) = p(1+q)$。若只以 p 表示（代入 $q = 1-p$），

$$\mathrm{E}(N) = \frac{3-2p}{p(2-p)}.$$

第 (ii) 部分

进行大量实验后，掷骰次数的平均值应接近 $\mathrm{E}(N)$，所以我们解 $\mathrm{E}(N) = m$ 来估计 p：

$$m\,p(2-p) = 3-2p \quad\Longleftrightarrow\quad mp^2 - 2(m+1)p + 3 = 0,$$

所以

$$p = \frac{(m+1) \pm \sqrt{(m+1)^2 - 3m}}{m} = \frac{m+1 \pm \sqrt{m^2 - m + 1}}{m}.$$

想一想 我们要取哪一个根?

每次实验最少要掷一次,所以 $m \geq 1$。于是 $\sqrt{m^2-m+1} \geq 1$(因为 $m^2-m = m(m-1) \geq 0$),所以取正号的根至少是 $(m+2)/m > 1$,这对概率来说是不可能的。根据同一个不等式,取负号的根至多是 $m/m = 1$,而且它是正数,因为 $(m+1)^2 > m^2-m+1$。所以估计值为

$$\hat{p} = \frac{m+1-\sqrt{m^2-m+1}}{m}.$$

验算

- 若 $p = 1$,每次实验都只需掷一次:$\mathrm{E}(N) = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$,而 $m = 1$ 给出 $\hat{p} = (2-1)/1 = 1$。
- 各概率之和为 1:$\sum_r \mathrm{P}(N = r)$ 逐项相消(telescope)后得 $\lim_{r\to\infty}(1-q^r)^2 = 1$。
- 对于公平的骰子,$p = \frac{1}{6}$ 给出 $\mathrm{E}(N) = \frac{8/3}{11/36} = \frac{96}{11} \approx 8.73$,比一颗骰子平均所需的 6 次稍多,这正合预期。一次包含 200,000 次实验的模拟得出平均值 8.71,而把 $m = 96/11$ 代入 $\hat{p}$ 的公式,则得回 $\frac{1}{6}$。

常见错误

- 把每颗骰子的投掷分开计算:两颗骰子同时掷一次只算作一次投掷,这正是 $N = \max(X, Y)$ 的原因。
- 忘记 $pq^{2r-2}(1+q)$ 这一项所需的求和是取 $x = q^2$,而不是 $x = q$。
- 在第 (ii) 部分保留两个根,而没有检查哪一个才可以是概率。

STEP 之外

$\mathrm{P}(\max \leq r) = \prod \mathrm{P}(X_i \leq r)$ 这个技巧,是处理独立变量的最大值(把符号换成 $\geq$ 则可处理最小值)的标准方法,也是*顺序统计量*(order statistics)的起点。第 (ii) 部分用的是*矩估计法*(method of moments):令样本平均值等于理论平均值,再解出参数。大学一年级的统计学会把它与最大似然法(maximum likelihood)比较,并探讨这类估计量(estimator)有多准确。至于概率方面,Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*(概率论入门教材)是很好的下一步。

Beyond STEP 详细解答:https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0;题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有(©),本文件不予转载。由机器从英文翻译而成;尚未经审阅。