详细解答

STEP II 2007，第 11 题

力学 • 三维空间中的抛体

STEP II 2007，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s2-q11

关键思路

把整个运动写成一个位置向量（position vector）：水平速度保持不变，只有垂直分量受重力影响。一旦把 $\mathbf{r}(t)$ 写在纸上，与 O 的距离就是 $|\mathbf{r}|$，而最短距离只需求一个二次式的最小值便可得到。最后一部分之所以行得通，是因为子弹极快，在它飞行期间质点几乎没有移动。

解答

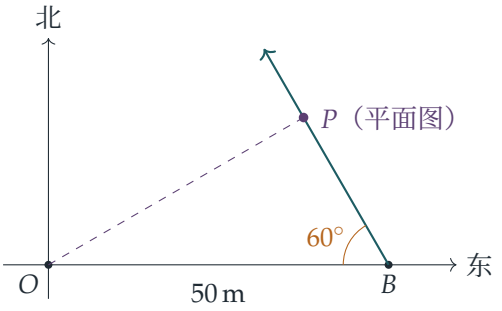
我们把质点（particle）视为只在重力作用下运动的一点（$g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$，不计空气阻力），并取 O 为原点，于是 B 的位置向量为 $50\mathbf{i}$。

第 (i) 部分

初速度的分量。若 $\tan\alpha = \frac{1}{2}$，则 $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ 及 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$（边长为 1、2、$\sqrt{5}$ 的三角形）。所以初速度的

$$\text{水平速率为} 25\cdot\tfrac{2}{\sqrt{5}} = 10\sqrt{5}, \qquad \text{垂直速率为} 25\cdot\tfrac{1}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}.$$

水平方向是哪一边？该方向与直线 OB 成 60° 角。假如质点大致朝东、远离 O 而去，它根本不可能经过 O 附近；要从 O 的北面经过，它必须折返向西并偏向北方。所以水平方向与 $\overrightarrow{BO}$（向西）成 60° 角，并在其北侧，由此得单位向量（unit vector）$-\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$。



因此水平速度为

$$10\sqrt{5}\left(-\tfrac{1}{2}\mathbf{i}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}\right)=-5\sqrt{5}\,\mathbf{i}+5\sqrt{15}\,\mathbf{j},$$

而且它保持不变，因为重力只沿垂直方向作用。垂直方向上，$z=5\sqrt{5}\,t-\frac{1}{2}(10)t^2$。加上起点 $50\mathbf{i}$，得

$$\mathbf{r}(t)=(50-5\sqrt{5}\,t)\mathbf{i}+5\sqrt{15}\,t\,\mathbf{j}+(5\sqrt{5}\,t-5t^2)\mathbf{k}.$$

与 O 的距离。把各分量平方后相加，

$$\begin{aligned}|\mathbf{r}|^2&=(2500-500\sqrt{5}\,t+125t^2)+375t^2+(125t^2-50\sqrt{5}\,t^3+25t^4)\\&=25t^4-50\sqrt{5}\,t^3+625t^2-500\sqrt{5}\,t+2500.\end{aligned}$$

把它与下式比较：

$$\begin{aligned}25(t^2-\sqrt{5}\,t+10)^2&=25(t^4+5t^2+100-2\sqrt{5}\,t^3+20t^2-20\sqrt{5}\,t)\\&=25t^4-50\sqrt{5}\,t^3+625t^2-500\sqrt{5}\,t+2500,\end{aligned}$$

两者相同。所以 $|\mathbf{r}|=5\,|t^2-\sqrt{5}\,t+10|$。二次式 $t^2-\sqrt{5}\,t+10$ 的判别式（discriminant）为 $5-40<0$，故它恒为正数，绝对值符号可以除去：

$$|\mathbf{r}|=5(t^2-\sqrt{5}\,t+10)\ \text{m},$$

正是所求。

点 P。配方（completing the square）得

$$t^2-\sqrt{5}\,t+10=(t-\tfrac{\sqrt{5}}{2})^2+\tfrac{35}{4},$$

所以当 $t=\frac{\sqrt{5}}{2}$ 时距离最小，而最短距离为 $5\cdot\frac{35}{4}=\frac{175}{4}=43.75\,\text{m}$。代入 $t=\frac{\sqrt{5}}{2}$，此时 $\sqrt{5}\,t=\frac{5}{2}$ 及 $t^2=\frac{5}{4}$：

$$\overrightarrow{OP}=\tfrac{75}{2}\,\mathbf{i}+\tfrac{25\sqrt{3}}{2}\,\mathbf{j}+\tfrac{25}{4}\,\mathbf{k}\quad\text{（单位为米）}.$$

$\overrightarrow{OP}$ 的水平部分，向东分量为 $\frac{75}{2}$，向北分量为 $\frac{25\sqrt{3}}{2}$。方位角（bearing）θ 是由正北起顺时针量度的，所以

$$\tan\theta=\frac{\text{东}}{\text{北}}=\frac{75/2}{25\sqrt{3}/2}=\sqrt{3},$$

又因为两个分量均为正数，故 $\theta=60^\circ$：由 O 测得 P 的方位角为 060°。

第 (ii) 部分

速度的垂直分量为

$$\dot{z} = 5\sqrt{5} - 10t,$$

它恰好在 $t = \frac{\sqrt{5}}{2}$ 时为零。这正是质点位于 P 的时刻，所以质点在 P 处达到最高点（高度为 $\frac{25}{4}\,\mathrm{m}$）。

第 (iii) 部分

子弹以 $350\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ 沿直线由 O 飞往 P（我们忽略重力对它的影响），所走的距离为 $OP = \frac{175}{4}\,\mathrm{m}$。所需时间为

$$T = \frac{175/4}{350} = \frac{1}{8}\,\mathrm{s}.$$

想一想 多过了这 $\frac{1}{8}$ 秒之后，质点在哪里?

由第 (ii) 部分，质点在 P 处的垂直速度为零，所以它在该处的速度纯粹是水平的，大小为 $10\sqrt{5}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$。在其后的 T 秒内，它水平移动了 $10\sqrt{5}\,T$，并下坠了 $\frac{1}{2}gT^2$。取 $T = \frac{1}{8}$，

$$\text{水平位移} = \frac{10\sqrt{5}}{8} \approx 2.80\,\mathrm{m}, \qquad \text{下坠距离} = 5 \cdot \frac{1}{64} \approx 0.08\,\mathrm{m}.$$

这两段位移互相垂直，所以质点与 P 的距离为

$$\sqrt{\frac{500}{64} + \frac{25}{4096}} = \frac{5\sqrt{1281}}{64} \approx 2.80\,\mathrm{m},$$

即约为 3 m，正是所求。（下坠的影响微乎其微：答案基本上就是 $10\sqrt{5}/8$。）神枪手射失了。

验算

- 当 $t = 0$ 时，公式给出 $5 \cdot 10 = 50\,\mathrm{m}$，即距离 OB。吻合。
- $|\overrightarrow{OP}|^2 = 37.5^2 + 21.65^2 + 6.25^2 = 1406.25 + 468.75 + 39.06 = 1914.06 = 43.75^2$，所以 P 的位置向量与最短距离一致。
- 以数值方法扫描 $|\mathbf{r}(t)|$，得最小值 43.75 m，出现于 $t \approx 1.118 = \frac{\sqrt{5}}{2}$；再让质点由 P 继续运动 0.125 s，得相距 2.796 m。

常见错误

- 把水平方向取为 $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{j}$（远离 O）。这样质点永远不会从 O 的北面经过，距离也算不出题目所给的式子。

► 把方位角写成 30°：那是由正东量起的角，但方位角是由正北起顺时针量度的。

STEP 之外

第 (iii) 部分是拦截问题（interception problem）的入门版本：要击中移动的目标，必须瞄准它将会到达的位置，这就要解 $|\mathbf{r}_{\text{目标}}(t) - \mathbf{r}_{\text{子弹}}(t)| = 0$，同时求出发射方向和时间。求 $|\mathbf{r}(t)|$ 的最小值，也正是轨道问题和碰撞问题中“最接近距离”（distance of closest approach）背后的想法；在这类问题中，把距离平方以得到多项式，是标准的第一步。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对这类向量运动学（vector kinematics）有严谨而完整的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。