详细解答

STEP II 2007，第 10 题

力学 · 涉及摩擦力的静力学

> **STEP II 2007，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q10

关键思路

这是一道静力学（statics）问题，唯一棘手的地方是质心（centre of mass）的位置。一旦知道 G 在轴上的位置，对接触点取力矩（taking moments）便可同时消去法向反作用力（normal reaction）和摩擦力（friction），直接求出 P。然后沿水平方向分解力，可知摩擦力的大小等于 P，余下的交给摩擦定律 $|F| \leq \mu R$ 便可。式中出现绝对值（modulus），是因为视乎 α 的大小，P 可能要推，也可能要拉。

解答

模型

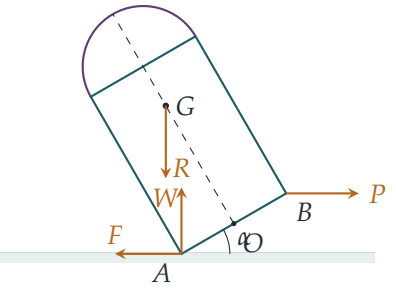
我们把这个立体视为刚体（rigid body），它与平面只在一点 A 接触，这一点是平底面（即圆柱体不与半球相连的一端）边缘上的最低点。设 B 为该底面的最高点，则 AB 是一条长度为 $2r$ 的直径，与水平方向成 α 角。作用力有：作用于质心 G 的重量 W；作用于 A 的法向反作用力 R 和摩擦力 F；以及作用于 B 的水平力 P。

质心

沿轴由底面的圆心 O 起量度距离。圆柱体的体积为 $3\pi r^3$，故质量为 $3\pi r^3\rho$，其质心位于 $\frac{3}{2}r$ 处。半球的体积为 $\frac{2}{3}\pi r^3$，密度为 3ρ，故质量为 $2\pi r^3\rho$；它的质心在其平面之外 $\frac{3}{8}r$ 处，而该平面位于 $3r$ 处，所以质心位于 $\frac{27}{8}r$ 处。总质量为 $5\pi r^3\rho$，而

$$OG = \frac{3\cdot\frac{3}{2}r + 2\cdot\frac{27}{8}r}{5} = \frac{\frac{9}{2}r + \frac{27}{4}r}{5} = \frac{9}{4}r.$$

因此 G 在轴上，距离底面 $\frac{9}{4}r$，并且 $W = 5\pi r^3\rho g$。



平衡

取 A 为原点，x 轴沿水平方向（由 A 指向 B 的垂足），y 轴铅垂向上。设 P 在 x 方向的水平分量为 X，故 X 可正可负；同样地，设摩擦力在 x 方向为 F。

底面由 A 出发，沿方向 $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ 伸展，所以 $B = (2r\cos\alpha, 2r\sin\alpha)$ 而 $O = (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$。轴垂直于底面，指向立体内部，方向为 $(-\sin\alpha, \cos\alpha)$。因此 G 的水平坐标为

$$x_G = r\cos\alpha - \tfrac{9}{4}r\sin\alpha.$$

沿铅垂方向分解，得 $R = W$。沿水平方向分解，得 $F + X = 0$，故 $|F| = |X|$。

> **想一想** 我们应该对哪一点取力矩?

对 A 取力矩：这样 R 和 F 都没有力矩，只剩下 W 和 P。重量沿铅垂方向作用并通过 G，所以它对 A 的力矩为 Wx_G（当 $x_G > 0$ 时为顺时针方向）。作用于 B 的水平力位于高度 $2r\sin\alpha$ 处，所以它的力矩为 $X \cdot 2r\sin\alpha$（当 $X < 0$ 时为逆时针方向，当 $X > 0$ 时为顺时针方向）。取顺时针方向为正，

$$Wx_G + 2r\sin\alpha\, X = 0 \quad\Longrightarrow\quad X = -\frac{W\left(r\cos\alpha - \frac{9}{4}r\sin\alpha\right)}{2r\sin\alpha} = W\left(\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2}\cot\alpha\right),$$

其中我们除以了 $\sin\alpha$，由于 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，它是正数。

摩擦条件

由于平面是粗糙的，而立体在 A 处不滑动，我们需要 $|F| \le \mu R$。利用 $|F| = |X|$ 和 $R = W > 0$，

$$W\left|\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2}\cot\alpha\right| \le \mu W \quad\Longrightarrow\quad \mu \ge \left|\tfrac{9}{8} - \tfrac{1}{2}\cot\alpha\right|,$$

这正是所要求的结果。

X 的正负号告诉我们 P 的作用方向。若 $\tan\alpha > \frac{4}{9}$，则 G 越过了 A，位于远离 B 的一侧，立体本身会向后翻倒，因此 P 必须把 B 向外拉离立体；若 $\tan\alpha < \frac{4}{9}$，则 P 必须向内推。无论哪种情况，摩擦力都与 P 方向相反，而绝对值正好涵盖这两种情况。

验算

- 若 $\tan\alpha = \frac{4}{9}$，则 $x_G = 0$：G 在 A 的正上方，立体自行平衡，$P = 0$，无需摩擦力。所得的界给出 $\mu \geq |\frac{9}{8} - \frac{9}{8}| = 0$，与预期相符。
- 当 $\alpha = 45°$ 时，所得的界为 $\mu \geq \frac{5}{8}$。
- 以数值方法验证：把立体切成薄圆片，得总质量为 $5\pi\rho r^3$ 及 $OG = 2.2500r$；再对 10 000 个随机的 α 值直接解三条平衡方程，每次所得的 $|F|/R$ 都等于 $|\frac{9}{8} - \frac{1}{2}\cot\alpha|$。

常见错误

- 忘记半球的密度是三倍，因而把它的质量当作 $\frac{2}{3}\pi r^3\rho$；这会令 G 的位置改变，常数 $\frac{9}{8}$ 也随之改变。
- 把半球质心的 $\frac{3}{8}r$ 由圆柱体的底面量起，而不是由半球本身位于高度 $3r$ 的平面量起。
- 预先假定 P（或摩擦力）的方向，因而漏掉绝对值：无论 P 向哪一方作用，结果都必须成立。

STEP 之外

求组合体的质心，其实是体积分（volume integral）的离散版本：$\bar{\mathbf{r}} = \int \rho\,\mathbf{r}\,\mathrm{d}V \big/ \int \rho\,\mathrm{d}V$，而半球的 $\frac{3}{8}r$ 本来就是这样推导出来的。在大学一年级的力学课程中，这会发展成刚体理论，其中把同样的积分里的 $\mathbf{r}$ 换成 r^2，便得到转动惯量（moments of inertia）。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学导论）对这两个概念都有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。