详细解答

STEP II 2007，第 1 题

纯数学 · 二项式近似

> **STEP II 2007，第 1 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s2-q1

关键思路

二项式级数（binomial series）只有在那个“小量”真的很小时才会快速收敛（converge），所以整道题的关键，就是把根式（surd）改写成 $\sqrt{1+\text{某个极小的数}}$ 的简单有理数倍。为此，我们要找一个完全平方数（或完全立方数），使它乘以 3 或 6 之后刚好落在 10 的某个幂旁边。这样 k 相对于 100（或 1000）就很小，只需寥寥数项便能达到所需的准确度。

解答

第 (i) 部分

设 $x=\frac{k}{100}$，$(1+x)^{1/2}$ 的二项式级数的系数为

$$\binom{\frac12}{1}=\frac12,\qquad \binom{\frac12}{2}=\frac{\frac12\cdot(-\frac12)}{2!}=-\frac18,\qquad \binom{\frac12}{3}=\frac{\frac12\cdot(-\frac12)\cdot(-\frac32)}{3!}=\frac{1}{16}.$$

代入 $x=k/100$，得

$$\left(1+\frac{k}{100}\right)^{1/2}\approx 1+\frac{k}{200}-\frac{k^2}{80\,000}+\frac{k^3}{16\,000\,000}.$$

(a) 取 $k=8$，左方就是 $\sqrt{1.08}$，而关键在于 $108=3\times 36$：

$$\sqrt{1.08}=\frac{\sqrt{108}}{10}=\frac{6\sqrt3}{10}=\frac{3\sqrt3}{5},\qquad \text{所以}\qquad \sqrt3=\frac53\sqrt{1.08}.$$

由级数可得

$$\sqrt{1.08}\approx 1+0.04-0.0008+0.000032=1.039232,$$

因此

$$\sqrt{3} \approx \frac{5}{3} \times 1.039232 = 1.7320533\ldots \approx 1.73205\text{(准确至小数点后五位)。}$$

(b)

? **想一想** k 取甚么值，才会令 $1 + \frac{k}{100}$ 等于某个简单平方数的 6 倍?

我们希望 $100 + k = 6m^2$，其中 m 为整数，而且 $6m^2$ 接近 100，这样 k 才会小。由于 $6 \times 16 = 96$，取 $m = 4$ 及 $k = -4$:

$$\sqrt{0.96} = \frac{\sqrt{96}}{10} = \frac{4\sqrt{6}}{10} = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt{6} = \frac{5}{2}\sqrt{0.96}.$$

当 $k = -4$ 时，首项之后的每一项都是负数:

$$\sqrt{0.96} \approx 1 - 0.02 - 0.0002 - 0.000004 = 0.979796,$$

于是

$$\sqrt{6} \approx \frac{5}{2} \times 0.979796 = 2.44949\text{(准确至小数点后五位)。}$$

这个 k 的大小只有 (a) 中的一半，所以这里被略去的各项更加微小。(例如由 $1.5 = 6/4$ 得出的 $k = 50$，同样可以准确地表示 $\sqrt{6}$，但当 $x = \frac{1}{2}$ 时，级数收敛得太慢，远远不足以准确至小数点后五位。)

第 (ii) 部分

取首两项，得

$$\left(1 + \frac{k}{1000}\right)^{1/3} \approx 1 + \frac{k}{3000}.$$

? **想一想** 哪一个立方数乘以 3 之后，刚好略大于 1000?

我们需要 $1000 + k = 3m^3$，而且 k 要小。在 $1000/3 \approx 333$ 附近的立方数有 $6^3 = 216$ 和 $7^3 = 343$，而 $3 \times 343 = 1029$ 非常接近 1000。所以取 $k = 29$:

$$\sqrt[3]{1.029} = \frac{\sqrt[3]{3 \times 7^3}}{10} = \frac{7\sqrt[3]{3}}{10}, \qquad \text{所以} \qquad \sqrt[3]{3} = \frac{10}{7}\sqrt[3]{1.029}.$$

利用两项的近似式，

$$\sqrt[3]{3} \approx \frac{10}{7}\left(1 + \frac{29}{3000}\right) = \frac{10}{7} \cdot \frac{3029}{3000} = \frac{3029}{2100},$$

这就是所求的近似值。

验算

用计算机可得 $\sqrt{3} = 1.7320508\ldots$ 及 $\sqrt{6} = 2.4494897\ldots$，两者都与上面的答案在小数点后五位之内吻合。至于第 (ii) 部分，$3029/2100 = 1.44238\ldots$，而 $\sqrt[3]{3} = 1.44225\ldots$。误差约为 1.3×10^{-4}，与第一个被略去的项的大小 $\frac{10}{7} \cdot \frac{1}{9}\left(\frac{29}{1000}\right)^2 \approx 1.3 \times 10^{-4}$ 相符，所以这个近似值略为高估了真实值。

常见错误

- 算错第三个系数：$\frac{1}{2} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (-\frac{3}{2})/6 = +\frac{1}{16}$，而不是 $-\frac{1}{16}$。
- 计算级数之后，忘记乘回 $\frac{5}{3}$、$\frac{5}{2}$ 或 $\frac{10}{7}$。
- 选了一个很大的 k（例如 (b) 中的 $k = 50$），这时只取三四项根本远远不够。

STEP 之外

究竟需要多少项，归根究柢是要为泰勒级数（Taylor series）的余项（remainder）定出上界。有了拉格朗日（Lagrange）余项公式，你就可以证明（而不只是相信）这些近似值确实准确至小数点后五位。把问题重新缩放到级数快速收敛的范围内，这个技巧正是计算机和电脑程序库实际计算方根和对数的方法。关于泰勒级数及其余项的理论，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（一本实分析入门教材）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。