详细解答

STEP I 2007，第 9 题

力学 · 斜坡上的极限摩擦力

STEP I 2007，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

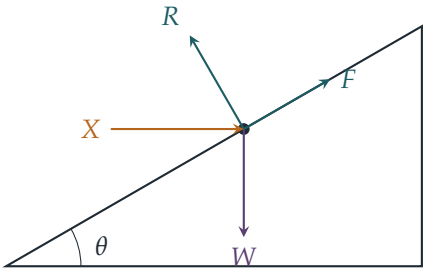
step.maths.org/questions/07-s1-q9

关键思路

这题是极限摩擦（limiting friction）的两种情况，两者的分别只在于摩擦力的方向。在每种情况下，我们沿斜面方向及垂直于斜面方向分解力，再消去法向反作用力（normal reaction），便可把每个水平力写成 W 乘以一个三角函数式的比。将两式相除可消去 W，剩下一条只涉及 k、μ 和 θ 的关系式。至于不等式，则来自 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ 永远不会超过 $\frac{1}{2}$ 这个事实。

解答

我们把物体模型化为质点（particle），并假设两种情况下摩擦力均达到极限，即 $F = \mu R$。为使代数运算简洁，记 $s = \sin\theta$ 及 $c = \cos\theta$。



水平力把质点压向斜面，所以它有一个沿斜面向上的分量 Xc，以及一个垂直压向斜面的分量 Xs。重量则有沿斜面向下的分量 Ws 和垂直压向斜面的分量 Wc。

即将下滑：力为 X

质点正处于即将向下滑动的状态，所以摩擦力 μR 沿斜面向上（如图所示）。先沿垂直于斜面的方向分解，再沿斜面方向分解，得

$$R = Wc + Xs, \qquad Xc + \mu R = Ws.$$

代入 R，

$$Xc + \mu Wc + \mu Xs = Ws \quad \Longrightarrow \quad X(c + \mu s) = W(s - \mu c). \tag{1}$$

即将上滑：力为 kX

现在质点正处于即将向上滑动的状态，所以摩擦力沿斜面向下。同理，

$$R' = Wc + kXs, \qquad kXc = Ws + \mu R',$$

所以

$$kX(c - \mu s) = W(s + \mu c). \tag{2}$$

想一想 这里眼前的每一项，我们都可以随意拿来做除数吗?

可以，这是由题目的物理情境保证的。题目说需要一个正的力 X 才能阻止质点下滑，即是说没有这个力质点便会滑下，这表示 $\tan\theta > \mu$，即 $s - \mu c > 0$。于是由 (1) 得 $X > 0$，而 $c + \mu s > 0$ 本来就成立。水平推力若要能够把质点推上斜面，(2) 便需要 $c - \mu s > 0$，即 $\tan\theta < 1/\mu$。两者合起来必有 $\mu < \tan\theta < 1/\mu$，特别是 $\mu < 1$；这一点到最后会用得着。

关系式

将 (2) 除以 (1)，X 和 W 同时消去：

$$k\,\frac{c - \mu s}{c + \mu s} = \frac{s + \mu c}{s - \mu c} \quad \Longrightarrow \quad k(c - \mu s)(s - \mu c) = (s + \mu c)(c + \mu s).$$

把两边展开，并利用 $s^2 + c^2 = 1$：

$$(c - \mu s)(s - \mu c) = sc - \mu c^2 - \mu s^2 + \mu^2 sc = (1 + \mu^2)sc - \mu,$$
$$(s + \mu c)(c + \mu s) = sc + \mu s^2 + \mu c^2 + \mu^2 sc = (1 + \mu^2)sc + \mu.$$

所以 $k(1 + \mu^2)sc - k\mu = (1 + \mu^2)sc + \mu$，整理后得

$$(k - 1)(1 + \mu^2)\sin\theta\cos\theta = \mu(k + 1),$$

这正是所需的结果。

不等式

右边是正数（因为 $\mu > 0$ 及 $k > 0$），而当 θ 为锐角时 $(1+\mu^2)\sin\theta\cos\theta$ 亦是正数；因此 $k > 1$。（这并不令人意外：把质点推上去所需的力，自然比仅仅把它顶住的大。）现在

$$\sin\theta\cos\theta = \tfrac{1}{2}\sin 2\theta \le \tfrac{1}{2},$$

而由于 $(k-1)(1+\mu^2) > 0$，我们可以把这个不等式两边乘以它：

$$\mu(k+1) = (k-1)(1+\mu^2)\sin\theta\cos\theta \le \tfrac{1}{2}(k-1)(1+\mu^2).$$

两边乘以 2，再把含 k 的项集合起来：

$$2\mu k + 2\mu \le k(1+\mu^2) - (1+\mu^2) \quad\Longrightarrow\quad k(1-2\mu+\mu^2) \ge 1 + 2\mu + \mu^2,$$

即 $k(1-\mu)^2 \ge (1+\mu)^2$。上文已证明 $\mu < 1$，所以 $(1-\mu)^2 > 0$，我们可以除以它而不改变不等号的方向：

$$k \ge \frac{(1+\mu)^2}{(1-\mu)^2}.$$

等号成立当且仅当 $\sin 2\theta = 1$，即 $\theta = 45°$。

> ? **想一想** 为甚么在最后一步之前，必须先知道 $\mu < 1$?

若 $\mu = 1$，我们便是除以零（而且上一行会变成 $0 \ge 4$，这是错的）；若 $\mu > 1$，相除虽然仍然合法，但 θ 须满足的条件早已不成立。从物理上看，当 $\mu \ge 1$ 时，$\tan\theta > \mu \ge 1$ 和 $\tan\theta < 1/\mu \le 1$ 这两个要求互相矛盾：要么质点根本不需要外力顶住，要么任何水平推力都无法令它开始向上滑。所以题目其实隐含了 $\mu < 1$。

验算

- 取 $\mu = \frac{1}{2}$ 及 $\theta = 45°$，则 $s = c = 1/\sqrt{2}$。由 (1) 和 (2)，$X = W\cdot\frac{1/2}{3/2} = \frac{1}{3}W$ 及 $kX = W\cdot\frac{3/2}{1/2} = 3W$，所以 $k = 9 = (1.5/0.5)^2$：这正是等号成立的情况。若改取 $\theta = 60°$，同样的公式给出 $k \approx 25.2 > 9$。
- 若 $\mu \to 0$，则 $X = kX = W\tan\theta$ 且 $k \to 1$，这与恒等式（两边皆为 0）及下界 1 都吻合。
- 以数值方法检验恒等式和不等式：随机选取 10^5 组 $\mu \in (0,1)$ 和符合条件的 θ，没有发现任何反例。

常见错误

- 取 $R = W\cos\theta$：水平力同样会把质点压向斜面，令反作用力增加 $X\sin\theta$。

- 两种情况下都让摩擦力指向同一方向。摩擦力总是与即将发生的运动方向相反。
- 除以 $(1-\mu)^2$ 而没有说明它为何是正数（且不等于零）。

STEP 之外

要看清这个结果，有一个巧妙的方法，就是引入摩擦角（angle of friction）λ，其中 $\tan\lambda = \mu$：法向反作用力与极限摩擦力可合成为单一个力，它与法线成 λ 角，而 (1) 和 (2) 则变成 $X = W\tan(\theta-\lambda)$ 及 $kX = W\tan(\theta+\lambda)$。所以 $k = \tan(\theta+\lambda)/\tan(\theta-\lambda)$，而该下界所说的，就是这个比在 $\theta = 45^\circ$ 时最小。这类运用摩擦角的论证，以及“摩擦锥”（friction cone）的概念，在大学的静力学（statics）和接触理论中会再次出现。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（力学入门）对摩擦和受力分析的处理十分严谨，正合大学一年级课程的要求。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。