详细解答

STEP I 2007，第 8 题

纯数学 · 三次曲线的相切

> **STEP I 2007，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q8

关键思路

两条曲线在某一点相切（touch），当且仅当求交点的方程在该处有重根（repeated root）。因此应考虑两个三次式之差，并预期它含有因式 $(x-2)^2$。含 a 各项的系数 $1, -6, 12, -8$ 正是 $(x-2)^3$ 的二项式系数（binomial coefficients），看出这一点后，因式分解（factorisation）和绘画略图都会容易得多。

解答

在 $(2,8)$ 相切及另一个交点

把含 a 的各项归在一起，

$$ax^3 - 6ax^2 + 12ax - 8a = a(x-2)^3, \qquad \text{所以} \qquad y = a(x-2)^3 + 12x - 16. \qquad (*)$$

它与 $y = x^3$ 的交点，就是下式的根：

$$a(x-2)^3 + 12x - 16 - x^3 = 0.$$

现在 $x^3 - 12x + 16$ 在 $x = 2$ 时为零，除去相应因式后得 $x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4)$。因此

$$\begin{aligned} a(x-2)^3 + 12x - 16 - x^3 &= a(x-2)^3 - (x-2)^2(x+4) \\ &= (x-2)^2[(a-1)x - 2a - 4]. \end{aligned}$$

在 $x = 2$ 处，两条曲线都通过 $(2,8)$，而因式 $(x-2)^2$ 表明 $x = 2$ 是交点方程的重根。等价地说，两者的斜率（gradient）相同：由 $(*)$ 得 $y' = 3a(x-2)^2 + 12$，它在 $x = 2$ 时等

于 12，而 $y = x^3$ 在该处的斜率是 $3 \cdot 2^2 = 12$。所以对 a 的每一个值，两条曲线都在 $(2, 8)$ 相切。

其余的交点都来自 $(a-1)x = 2a + 4$。

- 若 $a \neq 1$，则 $x = \dfrac{2a+4}{a-1}$，而它永远不会等于 2（否则需要 $2a + 4 = 2a - 2$）。所以恰好有另外一个交点，
$$\left(\frac{2a+4}{a-1}, \left(\frac{2a+4}{a-1}\right)^3\right).$$
- 若 $a = 1$，方括号内是常数 -6，所以没有其他交点。

想一想 哪一条曲线在上方？在甚么范围内？

因式分解已顺带回答了这个问题。由于 $(x-2)^2 \geq 0$，$(*)$ 减去 x^3 的正负号就是线性因式 $(a-1)x - 2a - 4$ 的正负号。由此可知曲线 $(*)$ 在另一个交点的哪一侧位于 $y = x^3$ 之上，而绘画略图所需的资料，大部分就在这里。

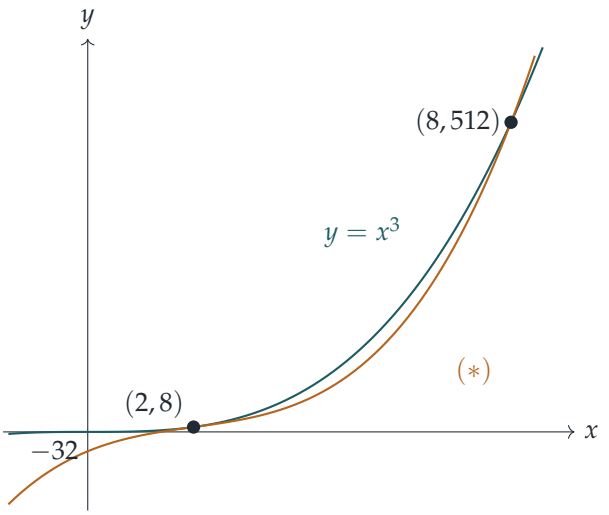
在全部三幅略图中，$(*)$ 在 $(2, 8)$ 都有一个拐点（point of inflection），该处斜率为 12，因为当 $a \neq 0$ 时 $y'' = 6a(x-2)$ 在该处变号。所以 $(*)$ 与 $y = x^3$ 在 $(2, 8)$ 有共同的切线（tangent）$y = 12x - 16$；$y = x^3$ 在该处向上凹（concave up），而 $(*)$ 则不然。

第 (i) 部分： $a = 2$

这时 $y = 2(x-2)^3 + 12x - 16$，而

$$y - x^3 = (x-2)^2(x-8).$$

另一个交点是 $(8, 512)$。曲线 $(*)$ 在 $x < 8$ 时位于 $y = x^3$ 之下（在 $x = 2$ 处相切），在 $x > 8$ 时位于其上。它的斜率 $6(x-2)^2 + 12$ 恒为正数，所以它是递增的，没有转向点（turning points）。它与 y 轴相交于 $(0, -32)$，并与 x 轴相交一次，位置在 $x \approx 1.37$ 附近。



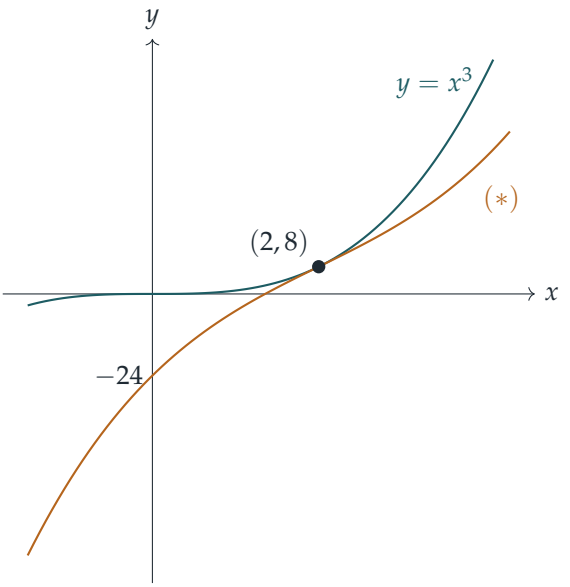
（纵向比例被大幅压缩，所以在 $(2,8)$ 的相切看起来是平的；两条曲线在该处有共同的切线。）

第 (ii) 部分： $a = 1$

这时 $y = (x-2)^3 + 12x - 16 = x^3 - 6x^2 + 24x - 24$，而

$$y - x^3 = -6(x-2)^2 \leq 0.$$

所以除了在 $(2,8)$ 相切之外，$(*)$ 处处位于 $y = x^3$ 之下；两者没有其他交点。无论向哪一个方向离开 $x = 2$，两者的差距 $6(x-2)^2$ 都会愈来愈大。斜率 $3(x-2)^2 + 12$ 恒为正数，所以 $(*)$ 是递增的。它与 y 轴相交于 $(0,-24)$，并与 x 轴相交一次，位置在 $x \approx 1.36$ 附近。



第 (iii) 部分： $a = -2$

现在另一个交点满足 $x = \dfrac{-4+4}{-3} = 0$，所以它就是原点 $(0,0)$，而

$$y - x^3 = (x-2)^2(-3x) = -3x(x-2)^2.$$

所以 $(*)$ 在 $x < 0$ 时位于 $y = x^3$ 之上，在 $x > 0$ 时位于其下，并在 $(2,8)$ 相切。

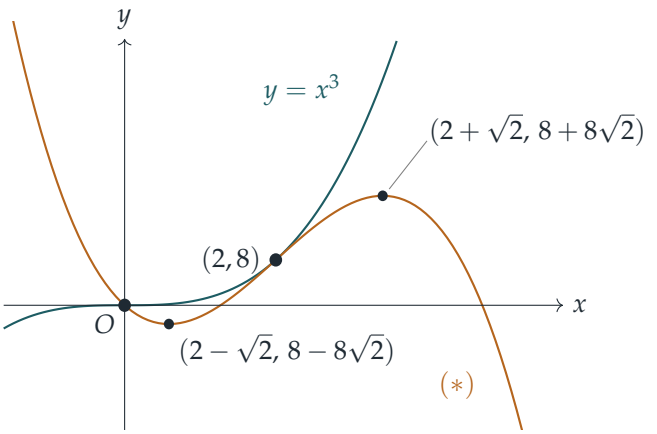
展开后，$y = -2(x-2)^3 + 12x - 16 = -2x^3 + 12x^2 - 12x = -2x(x^2 - 6x + 6)$，它与 x 轴相交于 $x = 0$ 和 $x = 3 \pm \sqrt{3}$（约为 1.27 和 4.73）。斜率是

$$y' = -6(x-2)^2 + 12,$$

它在 $(x-2)^2 = 2$ 时为零，即 $x = 2 \pm \sqrt{2}$。代入后，

$$x = 2 - \sqrt{2}: \quad y = 8 - 8\sqrt{2} \approx -3.31 \quad \text{(极小值)},$$
$$x = 2 + \sqrt{2}: \quad y = 8 + 8\sqrt{2} \approx 19.3 \quad \text{(极大值)}.$$

由于首项系数是负数，当 $x \to -\infty$ 时 $y \to +\infty$，当 $x \to +\infty$ 时 $y \to -\infty$。在原点，$(*)$ 的斜率是 -12，而 $y = x^3$ 的斜率是 0，所以两条曲线在该处确实互相穿越。



验算

- 在 $x = 2$ 处，对每一个 a，$(*)$ 都给出 $a \cdot 0 + 24 - 16 = 8$，且 $y' = 12$，与 $y = x^3$ 吻合。
- 取 $a = 2$ 和 $x = 8$，由简洁的形式得 $2 \cdot 6^3 + 96 - 16 = 512 = 8^3$，确认了点 $(8, 512)$。
- 取 $a = 0$，$(*)$ 就是切线 $y = 12x - 16$，而公式给出另一个交点在 $x = -4$；事实上 $x^3 - 12x + 16 = (x-2)^2(x+4)$。
- 我们用数千组随机有理数 a 和 x 精确地验证了这个因式分解，并以数值方法核对了第 (iii) 部分的转向值 $8 \pm 8\sqrt{2} \approx 19.31, -3.31$。

常见错误

- 遗漏 $a = 1$ 的情况：这时另一个交点的公式失效，因为根本没有另一个交点。
- 只证明两条曲线都通过 $(2, 8)$。相切还需要斜率相等，或等价地，需要有重根。
- 在第 (iii) 部分，把两条曲线画成在原点相切。它们在该处是互相穿越的，斜率并不相同。

STEP 之外

$f(x) - g(x)$ 的重根是相切在代数上的投影：两条曲线在该点一阶吻合。再推进一步，切触阶（order of contact）数算的是有多少阶导数相同，而这正是泰勒多项式（Taylor polynomials）背后的想法：泰勒多项式就是在某一点与函数有最高可能切触阶的多项式。Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（实分析入门）严谨地建立了泰勒定理。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（高等数学难题集）有更多 STEP 风格的曲线描绘题

目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。