详细解答

STEP I 2007，第 7 题

纯数学 · 直线之间的距离

STEP I 2007，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s1-q7

关键思路

在两条直线上各写出一个一般点，相减，再把长度平方：这样 D^2 就是两个参数（parameter）的二次式（quadratic）。窍门在于把这个二次式写成平方和（sum of squares），因为当每个平方都取到最小时，平方和也就最小。在第 (ii) 部分，同样的方法仍然适用，而对于不同的 k 值，这些平方如何拆开，正好告诉我们背后的几何。

解答

第 (i) 部分

L_1 上的一般点是 $P = (1+2\lambda,\ 2\lambda,\ 2-3\lambda)$，$L_2$ 上的一般点是 $Q = (4+\mu,\ -2+2\mu,\ 9-2\mu)$。所以

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 3+\mu-2\lambda \\ -2+2\mu-2\lambda \\ 7-2\mu+3\lambda \end{pmatrix}$$

而

$$D^2 = (3+\mu-2\lambda)^2 + (-2+2\mu-2\lambda)^2 + (7-2\mu+3\lambda)^2.$$

逐个系数合并同类项：

$$\mu^2:\ \ 1+4+4=9, \qquad \lambda^2:\ \ 4+4+9=17, \qquad \lambda\mu:\ \ -4-8-12=-24,$$
$$\mu:\ \ 6-8-28=-30, \qquad \lambda:\ \ -12+8+42=38, \qquad \text{常数项}:\ \ 9+4+49=62,$$

所以 $D^2 = 9\mu^2 + 17\lambda^2 - 24\lambda\mu - 30\mu + 38\lambda + 62$。

现在把题目给出的形式展开：

$$\begin{aligned}(3\mu-4\lambda-5)^2+(\lambda-1)^2+36 &= (9\mu^2+16\lambda^2+25-24\lambda\mu-30\mu+40\lambda)\\ &\quad+(\lambda^2-2\lambda+1)+36\\ &= 9\mu^2+17\lambda^2-24\lambda\mu-30\mu+38\lambda+62.\end{aligned}$$

两者相同，所以

$$D^2=(3\mu-4\lambda-5)^2+(\lambda-1)^2+36,$$

正如所求。

想一想 为甚么我们可以令两个平方同时为零?

每个平方都不小于 0，所以无论 λ 和 μ 怎样选，都有 $D^2\geq 36$。等号成立需要 $\lambda=1$ 及 $3\mu=4\lambda+5=9$，即 $\mu=3$。这两个条件互不冲突（第一个条件确定 λ，然后第二个条件确定 μ），所以 $D^2=36$ 确实可以取到。因此两条直线之间的最短距离是

$$D_{\min}=6,$$

并在以下两点取到：

$$\lambda=1:\ P=(3,\,2,\,-1)\quad \text{位于}L_1,\qquad \mu=3:\ Q=(7,\,4,\,3)\quad \text{位于}L_2.$$

作为验算，$\overrightarrow{PQ}=(4,2,4)$ 的长度是 $\sqrt{16+4+16}=6$，而且它与两个方向向量（direction vector）都垂直（perpendicular）：$(4,2,4)\cdot(2,2,-3)=8+4-12=0$ 及 $(4,2,4)\cdot(1,2,-2)=4+4-8=0$。连接两条直线的最短线段，正应如此。

第 (ii) 部分

L_3 上的一般点是 $P=(2,\,3+\alpha,\,5)$，L_4 上的一般点是 $Q=(3+4k\beta,\,3+(1-k)\beta,\,-2-3k\beta)$。所以

$$\overrightarrow{PQ}=\begin{pmatrix}1+4k\beta\\(1-k)\beta-\alpha\\-7-3k\beta\end{pmatrix}$$

而

$$\begin{aligned}D^2&=(1+4k\beta)^2+((1-k)\beta-\alpha)^2+(7+3k\beta)^2\\&=((1-k)\beta-\alpha)^2+25k^2\beta^2+50k\beta+50\\&=((1-k)\beta-\alpha)^2+25(k\beta+1)^2+25,\end{aligned}$$

这是因为 $(1+4k\beta)^2+(7+3k\beta)^2=1+8k\beta+16k^2\beta^2+49+42k\beta+9k^2\beta^2$。

无论 β 是甚么，我们都可以选 $\alpha=(1-k)\beta$ 令第一个平方为零，因为 α 没有在其他地方出现。所以问题变成 $25(k\beta+1)^2$ 可以小到甚么程度，而两种情况正是在这里分开。

想一想 当 $k=0$ 时，有甚么不同?

若 $k\neq 0$，我们可以取 $\beta=-1/k$，令 $k\beta+1=0$。若 $k=0$，无论 β 是甚么，$25(k\beta+1)^2$ 这一项都固定在 25。

情况 $k\neq 0$。每个平方都是非负的，所以 $D^2\geq 25$，等号在 $\beta=-1/k$、$\alpha=(1-k)\beta=(k-1)/k$ 时成立。最短距离是

$$D_{\min}=5,$$

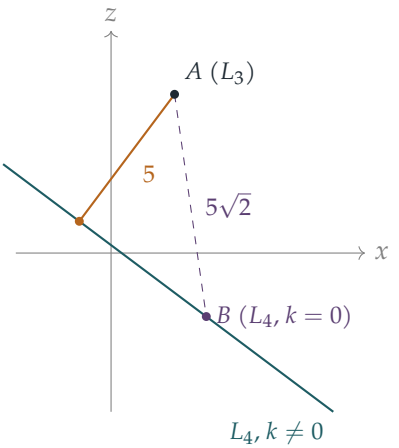
与 k 的（非零）值无关。最接近的两点是 $P=(2,\,3+\frac{k-1}{k},\,5)$ 和 $Q=(-1,\,3+\frac{k-1}{k},\,1)$，其中 $\overrightarrow{PQ}=(-3,0,-4)$，长度为 5。由于 $D_{\min}>0$，两条直线永不相交；而当 $k\neq 0$ 时，它们的方向 $(0,1,0)$ 与 $(4k,1-k,-3k)$ 并不平行（后者的第一和第三个分量不同时为零）。所以这两条直线是*异面*（*skew*）直线，而 5 就是它们的公垂线（common perpendicular）的长度，这条公垂线是唯一的。

情况 $k=0$。这时 L_4 的方向是 $(0,1,0)$，与 L_3 相同：两条直线*平行*（*parallel*）。此时 $D^2=(\beta-\alpha)^2+50$，只要 $\alpha=\beta$ 就取到最小值，所以

$$D_{\min}=\sqrt{50}=5\sqrt{2},$$

而且有无穷多对点可以取到这个值：其中一条直线上的任意一点，配上另一条直线上正对着它的那一点（y 坐标相同）。这其实就是两条平行线之间的固定距离。

几何意义。要看清这两条直线，最容易的方法是沿着 y 轴直望过去，即投影（projection）到 xz 平面上。由于 L_3 与 y 轴平行，它投影成单独一点 $A=(2,5)$，而与 L_3 垂直的距离在投影下保持不变。当 $k\neq 0$ 时，L_4 投影成通过 $(3,-2)$、方向为 $(4,-3)$ 的直线（$1-k$ 那个分量消失了），而 A 到这条直线的距离是 $|1\cdot(-3)-(-7)\cdot 4|/5=5$，与 k 无关。当 $k=0$ 时，L_4 投影成单独一点 $B=(3,-2)$，距离是 $AB=\sqrt{1+49}=5\sqrt{2}$。



所以，当 $k \neq 0$ 时答案是 5（异面直线，只有一条最短线段，它与两条直线都垂直）；当 $k = 0$ 时答案是 $5\sqrt{2}$（平行直线，距离处处相同）。

验算

在第 (i) 部分，代入 $\lambda = 1$、$\mu = 3$ 所得的两点相距 6，而且 $\overrightarrow{PQ}$ 与两条直线都垂直。在 (λ, μ) 的网格上作数值搜索，找不到低于 $D^2 = 36$ 的值。在第 (ii) 部分，对 $k = 0.001,\ 0.3,\ 1,\ -2,\ 5$ 以数值方法求 D^2 的最小值，每次都得到 25，而 $k = 0$ 时则得到 50。留意 $D_{\min}$ 在 $k = 0$ 处由 5 跳到 $5\sqrt{2}$。当 k 很小时，最接近的两点位于很远的地方，在 $\beta = -1/k$ 附近，所以极限不一定连续。

常见错误

- 忘记检查两个平方能否同时为零。这里是可以的，但必须明确说明，不能想当然。
- 在 $k = 0$ 时除以 k：$\beta = -1/k$ 这个选择只在 $k \neq 0$ 时可用，这正是要分两种情况的原因。
- 把 $k \neq 0$ 时的两条直线说成“相交”。它们不平行，但 $D_{\min} = 5 > 0$，所以它们是异面直线。

STEP 之外

多变量的配方法（completing the square）是二次型（quadratic forms）理论的起点：把 D^2 写成平方和，就是把一个对称矩阵（symmetric matrix）对角化（diagonalising），而求最小值则是一个最小平方法（least squares）问题。我们最后验证的垂直关系，就是最小平方法中的“正规方程”（normal equations），而异面直线距离的一般公式 $|(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})|/|\mathbf{u}\times\mathbf{v}|$ 也是来自同一套几何。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（线性代数入门）对投影和最小平方法有十分精彩的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。