详细解答

STEP I 2007，第 6 题

纯数学 · 丢番图方程

STEP I 2007，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/07-s1-q6

关键思路

两部分都由幂的差出发，而 $x-y$ 是每一个这类式子的因式。约去这个因式（因为 $d \neq 0$，所以可以这样做）之后，余下的是一个关于 x 和 y 的对称式（symmetric expression）。这个式子连同 $x-y=d$，就可以确定 x 和 y。要得到整数解，我们再选取适当的 d，使公式算出来的都是整数。在第 (ii) 部分，这就是要令一个平方根成为有理数（rational number）。

解答

第 (i) 部分

把左方因式分解（factorise），

$$(x-y)(x+y) = (x-y)^3.$$

由于 $x-y=d\neq 0$，我们可以除以 $x-y$，得 $x+y=(x-y)^2=d^2$。把这式与 $x-y=d$ 相加和相减，得

$$x=\frac{d^2+d}{2}=\frac{d(d+1)}{2}, \qquad y=\frac{d^2-d}{2}=\frac{d(d-1)}{2}.$$

要找整数对，设 $x=\sqrt{m}$ 及 $y=\sqrt{n}$。那么 $x^2-y^2=m-n$，而所要求的条件正好是 $x^2-y^2=(x-y)^3$。取 $d=\sqrt{m}-\sqrt{n}$，由于 $m>n$，它不等于零，于是

$$m=\left(\frac{d(d+1)}{2}\right)^2, \qquad n=\left(\frac{d(d-1)}{2}\right)^2.$$

若 d 是正整数，则 $d(d\pm 1)$ 是两个连续整数之积，所以是偶数。于是 $\sqrt{m}$ 和 $\sqrt{n}$ 都是整数，m 和 n 也是整数。此外，因为 $d>0$，所以 $m>n$。我们需要 $n>100$，即 $\frac{1}{2}d(d-1)>10$。

取 $d = 5$ 得 $\frac{1}{2}d(d-1) = 10$，并不足够，所以我们取 $d = 6$：

$$\sqrt{m} = 21, \quad \sqrt{n} = 15, \qquad m = 441, \quad n = 225.$$

验证：$m - n = 216 = 6^3 = (21-15)^3$。（其他答案同样成立，例如 $d = 7$ 时 $m = 784$，$n = 441$。）

第 (ii) 部分

再次因式分解：$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$。除以 $x - y = d \neq 0$，得

$$x^2 + xy + y^2 = d^3.$$

我们还有 $(x-y)^2 = d^2$，即 $x^2 - 2xy + y^2 = d^2$。从上一条方程减去这一条，得 $3xy = d^3 - d^2$，正是所要证明的结果。

现在代入 $y = x - d$：

$$3x(x-d) = d^3 - d^2 \quad \Longrightarrow \quad 3x^2 - 3dx - (d^3 - d^2) = 0.$$

由二次公式（quadratic formula），

$$x = \frac{3d \pm \sqrt{9d^2 + 12(d^3 - d^2)}}{6} = \frac{3d \pm \sqrt{3d^2(4d-1)}}{6}.$$

现在 $\sqrt{3d^2(4d-1)} = |d|\sqrt{3(4d-1)}$，而 $\pm$ 已经涵盖正负两种情况，所以可以把 $|d|$ 换成 d。乘以 2，

$$2x = d \pm \frac{d\sqrt{3(4d-1)}}{3} = d \pm d\sqrt{\frac{4d-1}{3}},$$

这就是所要求的结果。

想一想 怎样选取 d，才能使 x 和 y 都是整数?

若 $m = x$ 和 $n = y$ 是整数，则 $d = m - n$ 是非零整数。要使 x 是有理数，$\sqrt{(4d-1)/3}$ 必须是有理数。把它记作 k。那么 $k^2 = (4d-1)/3$ 是整数，而整数的平方根只有在该整数是完全平方数（perfect square）时才是有理数，所以 k 是整数。因此我们需要

$$4d - 1 = 3k^2 \quad \text{对某个整数} k \geq 0.$$

左方是奇数，所以 k 是奇数。于是 $2x = d(1 \pm k)$ 是偶数，所以 x 是整数，$y = x - d$ 也是整数。

- $k = 1$ 给出 $d = 1$，于是 $x = 1$，$y = 0$ 或 $x = 0$，$y = -1$。两组都不是由两个正整数组成。
- $k = 3$ 给出 $d = 7$，于是 $2x = 7 \pm 21$。取正号得 $x = 14$，$y = 7$。

所以 $m = 14$，$n = 7$ 符合要求：

$$m^3 - n^3 = 2744 - 343 = 2401 = 7^4 = (m-n)^4.$$

次序是重要的：若取 $m = 7$，$n = 14$，左方是 -2401，右方却是 $+2401$。

验算

- 第 (i) 部分：$21^2 - 15^2 = 441 - 225 = 216$，而 $(21-15)^3 = 216$。
- 第 (ii) 部分：取 $d = 7$，$3xy = 3 \cdot 14 \cdot 7 = 294$，而 $d^3 - d^2 = 343 - 49 = 294$。
- 用电脑在 $1 \le m, n < 200$ 的范围内搜索，恰好找到 $(14,7)$、$(57,38)$ 和 $(148,111)$。它们来自 $k = 3, 5, 7$（即 $d = 7, 19, 37$），与公式吻合。搜索结果亦确认，在第 (i) 部分满足 $n > 100$ 的解之中，$(441,225)$ 是最小的。

常见错误

- 忘记约去因式时需要 $x - y \neq 0$。这正是题目假设 $d \neq 0$ 的原因。
- 在第 (i) 部分取 $d = 5$，得 $n = 100$，不符合严格不等式（strict inequality）$n > 100$。
- 不加说明就写 $\sqrt{d^2} = d$。它其实等于 $|d|$，是因为有 $\pm$，我们才可以去掉绝对值符号。

STEP 之外

第 (ii) 部分把丢番图方程（Diophantine equation）$m^3 - n^3 = (m-n)^4$ 完全解出：对奇数 $k \ge 3$ 取 $d = (3k^2+1)/4$，解就是 $m = \frac{1}{2}d(k+1)$ 和 $n = \frac{1}{2}d(k-1)$。要求一个平方根是有理数，是把这类方程化为简单得多的条件 $4d - 1 = 3k^2$ 的标准方法。这类方程，以及它们背后二次型（quadratic form）的算术，可参阅 Davenport 的 *The Higher Arithmetic*（一本数论入门经典）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。