详细解答

STEP I 2007，第 5 题

纯数学 • 多面体的几何

> **STEP I 2007，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/07-s1-q5

关键思路

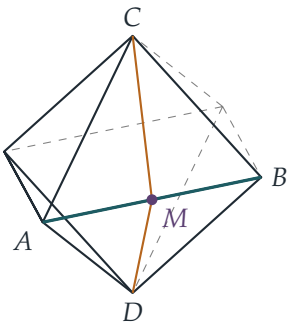
正八面体（regular octahedron）可以非常整齐地放进坐标系：它的六个顶点可取为各坐标轴正、负方向上距离原点一个单位的点。用了这个模型，两部分都只是向量（vector）的运算。两个面之间的夹角，是在垂直于它们公共棱的平面上量度的，所以我们取两条直线：它们都由公共棱的中点出发，分别横越两个面，到达对面的顶点。至于各面的中心，只是三个顶点的平均。

解答

任何两个正八面体都只相差一个缩放比例，而角度和体积之比在缩放之下都不会改变。因此我们不妨考虑顶点为

$$(\pm 1, 0, 0), \qquad (0, \pm 1, 0), \qquad (0, 0, \pm 1).$$

的正八面体。这些点之中，任何两个不是相对的点都相距 $\sqrt{2}$，由此得出 12 条棱；而各个面就是每条坐标轴上各取一个顶点所成的 8 个三角形，每一种正负号的选择对应一个面。每个面都是边长为 $\sqrt{2}$ 的等边三角形，所以这确实是一个正八面体。



第 (i) 部分

取两个有公共棱的面；根据对称性，每条棱的情况都一样，所以只考虑其中一条便足够。设 $A=(1,0,0)$、$B=(0,1,0)$、$C=(0,0,1)$ 及 $D=(0,0,-1)$，则面 ABC 与面 ABD 相交于 AB。设 $M=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0)$ 为 AB 的中点。

> ? **想一想** 两个平面相交于一条直线，它们之间的夹角应怎样量度?

我们在公共直线上取一点，然后在每个平面上，作通过该点并垂直于公共直线的直线；这两条直线之间的夹角，就是两个面之间的夹角。由于每个面都是等边三角形，三角形 ABC 的中线（median）MC 垂直于 AB，三角形 ABD 的中线 MD 亦然。所以我们要求的角就是 $\angle CMD$。

现在

$$\overrightarrow{MC}=\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1\right),\qquad \overrightarrow{MD}=\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-1\right),$$

而两者都垂直于 $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$，正如所料。两个向量长度的平方都是 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+1=\frac{3}{2}$，而

$$\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}-1=-\tfrac{1}{2}.$$

因此

$$\cos\angle CMD=\frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}=-\frac{1}{3},$$

所以两个面之间的夹角是 $\arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$，约为 $109.5°$，正是所求。余弦值是负数，所以这个角是钝角：正八面体沿棱的地方不及正方体那么尖锐。

若不用坐标，同一个计算就是在三角形 CMD 中运用余弦定理（cosine rule）。设棱长为 a，则中线 $MC=MD=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，而 C、D 是相对的顶点：A、C、$(-1,0,0)$、D 四点构成一个边长为 a 的正方形，所以 $CD=\sqrt{2}\,a$。于是

$$2a^2=\tfrac{3}{4}a^2+\tfrac{3}{4}a^2-2\cdot\tfrac{3}{4}a^2\cos\angle CMD\quad\Longrightarrow\quad\cos\angle CMD=-\tfrac{1}{3}.$$

第 (ii) 部分

一个面的中心是它三个顶点的平均。每个面都有一个顶点是 $(\pm1,0,0)$，一个是 $(0,\pm1,0)$，一个是 $(0,0,\pm1)$，所以它的中心是

$$\left(\pm\tfrac{1}{3},\pm\tfrac{1}{3},\pm\tfrac{1}{3}\right),$$

八种正负号的选择给出八个中心。这些点正好是一个边长为 $\frac{2}{3}$ 的正方体的顶点，所以

$$V_{\text{cube}} = \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 = \tfrac{8}{27}.$$

正八面体是由两个以正方形为底的棱锥（pyramid），沿着顶点为 $(\pm1,0,0),(0,\pm1,0)$ 的正方形黏合而成。这个正方形的对角线长度为 2，所以它的面积是 $\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2 = 2$，而每个棱锥的高是 1。因此

$$V_{\text{oct}} = 2\times\tfrac{1}{3}\times 2\times 1 = \tfrac{4}{3}.$$

两者之比为

$$\frac{V_{\text{oct}}}{V_{\text{cube}}} = \frac{4/3}{8/27} = \frac{9}{2},$$

所以正八面体的体积与正方体的体积之比是 $9:2$。

验算

- $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109.47^\circ$。对坐标模型的全部 12 条棱，以数值方式重复上述中点计算，每次都得出 $\cos = -\frac{1}{3}$。
- 正八面体就是 $|x|+|y|+|z|\le 1$。在 $[-1,1]^3$ 内随机取 10^6 个点，以蒙地卡罗（Monte Carlo）方法估算它的体积，结果是 1.330，而准确值是 $\frac{4}{3}$。
- 正方体位于正八面体之内（每个中心都满足 $|x|+|y|+|z|=1$），所以比值必定大于 1。而 $\frac{9}{2}$ 确实如此。

常见错误

- 取了向外法向量（outward normal）$(1,1,1)$ 与 $(1,1,-1)$ 之间的夹角，得出 $\arccos\frac{1}{3}$。两个面本身之间的夹角是它的补角。
- 沿着不垂直于公共棱的直线量度夹角，例如沿两条棱 CA 和 DA。在这里那个角是 90°，但它并不是两个面之间的夹角。
- 以为正方体的边长就是两个相对的面的中心之间的距离。那个距离 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 其实是正方体的一条空间对角线。

STEP 之外

正方体与正八面体是互为对偶（dual）的多面体：把其中一个的各面中心连接起来，就得到另一个，面与顶点的角色互相对调。对偶性是第一个迹象，显示这两个立体的对称群（symmetry group）是同一个群，其阶为 48；你会在群论的入门课程中遇到它。想了解柏拉图立体（Platonic solids）的对称群，可参阅 Armstrong 的 *Groups and Symmetry*（一本关于群与对称的入门书）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。